TEORIA GRAFOW 2 (TGR 430)– WIOSNA 2006

Andrzej Ruciński
w oparciu o podrecznik Diestela

February 28, 2006

1 Twierdzenie strukturalne Gallai'a i Edmondsa

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem, a $v \in V$. Wprowadźmy oznaczenia

$$N_G(v) = \{u \in G : uv \in E(G)\}$$

i, dla $S \subseteq V$,

$$N_G(S) = \bigcup_{v \in S} N_G(v).$$

Zbiory $N_G(v)$ i $N_G(S)$ nazywamy *sąsiedztwami*.

Skojarzenie M w grafie G to dowolny podgraf grafu G złożony z rozłącznych krawędzi. Mówimy, że skojarzenie M *nasyca* zbiór S, gdy $S \subseteq V(M)$. Skojarzenie jest *doskonałe*, gdy nasyca cały zbiór $V(G)$. Skojarzenie doskonałe nazywane jest często *1-faktorem*.

Twierdzenie 1 (Hall, 1935)) *Niech $G = (V_1, V_2, E)$ będzie grafem dwudzielnym. Wtedy G posiada skojarzenie nasycające V_1 wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $S \subseteq V_1$ zachodzi nierówność*

$$|N_G(S)| \geq |S|. \tag{1}$$

Wniosek 1 *Każdy k-regularny graf 2-dzielny ma skojarzenie doskonałe, a więc i 1-faktoryzację, tzn. rozkład zbioru krawędzi na k rozłącznych skojarzeń doskonałych.*

Wniosek 1 nie jest prawdziwy dla wszystkich grafów; najmniejszym kontrprzykładem dla $k = 3$ jest graf Petersena.

Wniosek 2 *Jeśli w grafie 2-dzielnym G dla każdego $S \subseteq V_1$ mamy $|N(S)| \geq |S| - d$, to G ma skojarzenie nasycające wszystkie oprócz co najwyżej d wierzchołków zbioru V_1.*

Niech $\mathcal{C}_G$ będzie rodziną wszystkich składowych grafu G, a $q(G)$ – liczbą składowych nieparzystych, tzn.

$$q(G) = |\{C \in \mathcal{C}_G : |V(C)| \text{ jest liczbą nieparzystą } \}|.$$

Twierdzenie 2 (Tutte) *G ma 1-faktor wgdy dla każdego S*

$$q(G - S) \leq |S|.$$

Graf G nazywamy *factor-critical* gdy $V_G \neq \emptyset$ i dla każdego $v \in V_G$ podgraf $G - v$ ma 1-faktor. Zbiór $S \subseteq V_G$ nazywamy *matchable*, gdy graf dwudzielny

$$H_S = (S, \mathcal{C}_{G-S}, \{sC : \exists c \in V(C) : sc \in E(G)\})$$

ma skojarzenie nasycające S.

Twierdzenie 3 (Tw. Strukturalne, Gallai 1964, Edmonds 1965) *Dla każdego grafu G*

(a) Istnieje $S \subseteq V(G)$ taki, że

  (i) S jest matchable

  (ii) Każda składowa $C \in \mathcal{C}_{G-S}$ jest factor-critical

(b) Dla każdego $S \subseteq V(G)$ spełniającego warunki (i) and (ii)

$$G \text{ ma 1-faktor} \qquad \Leftrightarrow \qquad |S| = |\mathcal{C}_{G-S}|.$$

Uwaga 1 Tw. strukturalne implikuje Tw. Tutte'a, bo $\exists S \subseteq V(G)$ taki, że

$$|S| \overset{(i)}{\leq} |\mathcal{C}_{G-S}| \overset{(ii)}{=} q(G - S) \overset{T.T.}{\leq} |S| \qquad \Rightarrow \qquad |S| = |\mathcal{C}_{G-S}|,$$

wię na podstawie części (b), G ma 1-faktor.

Uwaga 2 Część (a) implikuje część (b), bo jeśli G ma 1-faktor, to jak poprzednio z (a) wynika, że $|S| = |\mathcal{C}_{G-S}|$; a w drugą stronę, jeśli $|S| = |\mathcal{C}_{G-S}|$, to konstruujemy 1-faktor M w G ze skojarzenia M_S nasycającego S w H_S (M_S jest w tym przypadku doskonałe) oraz z 1-faktorów M_s w $C - v_s$, gdzie $s \in S$, $v_s \in V(C)$, a $sv_s \in M_S$.

Uwaga 3 Tw. Strukturalne mówi wiele na temat struktury największych skojarzeń (nie tylko doskonałych). Jeśli S spełnia (i) i (ii), to mówimy, że skojarzenie M jest generowane przez S, gdy powstaje z S w sposób opisany w Uwadze 2. (Jeśli $|S| < |\mathcal{C}_{G-S}|$, to M nie jest doskonałe.) Ten sam zbiór S może generować wiele skojarzeń, wszystkie tej samej mocy

$$|S| + \frac{1}{2}\left(n - |S| - |\mathcal{C}_{G-S}|\right),$$

gdzie $n = ||V(G)|$.

Obserwacja 1 *Każde największe skojarzenie M w G jest generowane przez każdy zbiór $S \subseteq V(G)$ spełniający warunki (i) i (ii).*

Dowód: Ustalmy największe skojarzenie M w G oraz zbiór $S \subseteq V(G)$ spełniający warunki (i) i (ii). Niech M_0 będzie dowlnym skojarzeniem generowanym przez S. Skracając $\mathcal{C}_{G-S}$ do $\mathcal{C}$, mamy

$$|M| \geq |M_0| = |S| + \frac{1}{2}\left(n - |S| - |\mathcal{C}|\right).$$

Niech k_S będzie liczbą krawędzi M o przynajmniej jednym końcu w S, a $k_{\mathcal{C}}$ – liczbą pozostałych krawędzi M. Wtedy

$$k_S \leq |S| \qquad k_{\mathcal{C}} \leq \frac{1}{2}\left(n - |S| - |\mathcal{C}|\right), \text{ ale } \qquad |M| = k_S + k_{\mathcal{C}}.$$

Stąd wynika, że

$$k_S = |S| \qquad k_{\mathcal{C}} = \frac{1}{2}\left(n - |S| - |\mathcal{C}|\right),$$

a więc M też jest generowane przez S. ■

Dowód Twierdzenia 3(a): Dowód opiera się na indukcji względem $n = |V(G)|$. Dla $n = 1$ wybierzmy $S = \emptyset$. Dla $n \geq 2$ załóżmy, że Twierdzenie 3 jest prawdziwe dla wszytkich grafów G' z $|V(G')| < n$.

Zdefiniujmy parametr $d = d(G)$ jako

$$d = \min\{d' : \forall T \subseteq V(G) \qquad q(G-T) \leq |T| + d'\}$$

(można by go nazwać deficytem Tutte'a). Biorąc $T = \emptyset$, widzimy, że $d \geq 0$. Stąd istnieje zbiór S, dla którego

$$q(G-S) = |S| + d. \tag{2}$$

Niech S będzie *największym* zbiore S spełniającym równość (2). Pokażemy, że S spełnia warunki (i) i (ii) z części (a) Twierdzenia 3. Zrobimy to w 3 krokach, ujętuch w formie faktów. Niech $\mathcal{C} := \mathcal{C}_{G-S}$.

Fakt 1 $|\mathcal{C}| = q(G-S)$

Dowód: Przypuśćmy nie wprost, że $\exists C \in \mathcal{C}$, taka że $|V(C)|$ jest liczbą parzystą. Dla dowolnego $c \in V(C)$, weźmy $S' = S \cup \{c\}$ i $C' - c$. Ponieważ $|V(C)|$ jest liczbą nieparzystą, to $q(C') \geq 1$. Stąd

$$q(G-S') \geq q(G-S) + 1 \overset{(2)}{=} |S'| + d.$$

Ale z definicji d, $q(G-S') \leq |S'| + d$, więc $q(G-S') \leq |S'| + d$, co jest sprzeczne z wyborem S. ■

Fakt 2 $\forall C \in \mathcal{C}$: *składowa C jest factor-critical.*

Dowód: Przypuśćmy nie wprost, że $\exists C \in \mathcal{C} \quad \exists c \in V(C)$ takie, że $C' = C - c$ nie ma 1-faktora. Z założenia indukcyjnego zastosowanego do C' oraz Tw. Tutte'a (patrz Uwaga 1) $\exists T' \subseteq V(C')$ taki, że $q(C'-T') \geq |T'| + 1$. Ale, $q(C'-T') = |T'| \mod 2$, więc $q(C'-T') \geq |T'| + 2$. Weźmy $S' = S \cup \{c\} \cup T'$. Wtedy

$$q(G-S') = q(G-S) - 1 + q(C'-T') \geq |S'| + d \geq q(G-S'),$$

ostatnia nierówność z definicji d. To stoi w sprzeczności z wyborem zbioru S. ■

Fakt 3 *S jest matchable.*

Dowód: Możemy założyć, że $S \neq \emptyset$. wtedy $q(G-S) = |S| + d > 0$, więc $\mathcal{C} \neq \emptyset$.

Przyjrzyjmy sie grafowi dwudzielnemu $H := H_S$. Niech $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ i $S' = N_H(\mathcal{C}')$. Wtedy, z definicji d, $|S'| \geq q(G-S') - d \geq |\mathcal{C}'|$, przy czym ostatnia nierówność wynika stąd, że każda składowa $C \in \mathcal{C}'$ należy do $\mathcal{C}_{G-S'}$ (narysuj!). Na podstawie Wniosku 2, H ma skojarzenie nasycające co najmniej $|\mathcal{C}| - d = q(G-S) - d = |S|$ wierzchołków zbioru $\mathcal{C}$, a więc wszystkie z S. ■