

KOMBINATORYKA – 9
(Przeliczanie grafów, lemat Burnside'a)

1. Zad. 9.1 z podręcznika
2. Zad. 9.2 z podręcznika
3. Zad. 9.3 z podręcznika
4. Zad. 9.4 z podręcznika
5. Zad. 9.5 z podręcznika
6. (dot. dowodu Joyala) W punktach (a) i (b) poniżej sam(a) wymyśl po kilka przykładów z $5 \leq n \leq 10$.
(a) Dla dowolnego odwzorowania $f : [n] \rightarrow [n]$ znajdź drzewo z kęgosłupem, które mu odpowiada.
(b) Dla dowolnego drzewa z kęgosłupem znajdź odpowiadające mu odwzorowanie.
7. Dla drzewa T z Zad. 9.8, rysunek (3), z podręcznika, wyznacz a) wszystkie automorfizmy, b) liczbę grafów na zbiorze wierzchołków $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ izomorficznych z T .
8. Wyznacz liczbę wszystkich istotnie różnych kolorowań wierzchołków drzewa z poprzedniego zadania przy pomocy 2 kolorów.
9. Narysuj dowolny graf na 8 wierzchołkach, który ma dokładnie 9 krawędzi, a podana permutacja wierzchołków α (w zapisie cyklicznym) jest automorfizmem tego grafu. Podaj odpowiadającą jej permutację krawędzi $\alpha^{(2)}$. Następnie podaj przykład grafu na 8 wierzchołkach i 9 krawędziach, dla którego podana permutacja nie jest automorfizmem tego grafu.
a) $\alpha = (5, 6, 7, 8, 1, 2, 3, 4)$ b) $\alpha = (1)(2)(3, 4)(5, 6, 7, 8)$
10. Kolorujemy naszyjnik złożony z 5 koralików, każdy koralik jednym z 2 kolorów. Zakładamy, że kolorowania f_1 i f_2 nie różnią się istotnie, jeśli f_1 otrzymamy z f_2 przez dowolny z 5 obrotów naszyjnika. Wyznacz liczbę istotnie różnych kolorowań naszyjnika
a) korzystając z lematu Burnside'a,
b) rysując wszystkie istotnie różne kolorowania.
11. Rozważamy sześcián, wraz z grupą obrotów wokół różnych osi: są 3 osie łączące środki przeciwległych ścian, 4 osie łączące przeciwległe wierzchołki i 6 osi łączących środki przeciwległych krawędzi. Każdy obrót traktujemy jako permutację ścian. Kolorujemy ściany sześciánu, każdą jednym z 3 kolorów. Korzystając z lematu Burnside'a, wyznacz liczbę istotnie różnych kolorowań sześciánu.
12. Zad. 10.1 z podręcznika
13. Zad. 10.2 z podręcznika
14. Zad. 10.5 z podręcznika
15. Ile jest wszystkich, parami nieizomorficznych, grafów na 5 wierzchołkach?