KOMBINATORYKA – 8
(Podziały)

$S(n,k)$ – # nieuporządkowanych podziałów zbioru $[n]$ na k niepustych podzbiorów (# Stirlinga 2. rodzaju),
$s(n,k)$ – # Stirlinga 1. rodzaju,
$C(n,k)$ – # permutacji rzędu n o k cyklach,
$P(n,k)$ – # nieuporządkowanych podziałów liczby n na k dodatnich składników.

1.
(a) Co jest większe: $P(n,k)$ czy $S(n,k)$?
(b) $P(n,2) = ...$
(c) $S(n,2) = ...$

2. Uzasadnij kombinatorycznie, że $P(8,5) \leqslant \binom{7}{4}$.

3. Uzasadnij, że $P(n,3)$ równa się liczbie podziałów liczby $2n$ na trzy składniki, wszystkie mniejsze niż n.

4. Oblicz $P(n,n-2)$, $C(n,n-2)$ i $S(n,n-2)$.

5. Uzasadnij kombinatorycznie, że $P(8,5) > \binom{7}{4}/5!$.

6. Uzasadnij, że
(a) $P(2n,n) = P(n)$,
(b) $P(n,k) = P(n-1,k-1) + P(n-k,k)$ dla $n \geqslant k \geqslant 2$.

7. Udowodnij, że liczba podziałów liczby n na parzyste składniki równa się liczbie podziałów liczby n, w których każda liczba występuje parzystą liczbę razy (zero jest liczbą parzystą). Proszę to zrobić
a) za pomocą diagramów Ferrersa.
b) bez diagramów Ferrersa.

8. Sprawdź, że $|s(4,2)| = C(4,2)$.