KOMBINATORYKA – 4

(równania rekurencyjne i funkcje tworzące)

1. Na ile sposobów można wciągnąć na n-metrowy maszt flagi trzech kolorów, jeśli flagi czerwone mają szerokość dwóch metrów a pozostałe jednego metra?

2. Znajdź liczbę n-elementowych ciągów ternarnych (tzn. o elementach ze zbioru $\{0, 1, 2\}$), w których liczba zer jest parzysta.

3. Wyznacz w postaci rekurencyjnej liczbę ciągów ternarnych (tzn. ciągów złożonych z cyfr $0, 1, 2$) długości n, w których
a) żadne dwie dwójki nie stoją obok siebie.
b)* żadne dwie jedynki ani żadne dwie dwójki nie stoją obok siebie.

4. Przyjmijmy oznaczenie $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$. Ile jest uporządkowanych par zbiorów (A_1, A_2) takich, że $A_1 \cup A_2 = [n]$, jeżeli zakładamy, że
a) zbiory są rozłączne?
b) zbiory nie muszą być rozłączne?
Chodzi o rozwiązanie rekurencyjne.

5. Ile jest nieuporządkowanych par zbiorów $\{A_1, A_2\}$ takich, że $A_1 \cup A_2 = [n]$, jeżeli zakładamy, że
a) zbiory A_1, A_2 są rozłączne?
b) zbiory A_1, A_2 nie muszą być rozłączne?
Chodzi o rozwiązanie rekurencyjne. Jak zmieni się rozwiązanie, jeśli założymy, że zbiory A_1, A_2 są niepuste?

6. Mamy gruby krążek sera i wykonujemy n ($n \geqslant 0$) cięć (różnym cięciom odpowiadaja różne płaszczyzny w przestrzeni) Chcemy otrzymać w ten sposób jak najwięcej kawałków sera.
a) Na ile maksymalnie kawałków rozpadnie się ser przy 4 cięciach?
b) Wyznacz P_n – maksymalną liczbę kawałków sera, powstających po n cięciach.

7. Metodą równań charakterystycznych rozwiązać rekurencje:

a) $a_0 = -1, a_1 = 1$, $a_n = 3a_{n-2} + 2a_{n-1}$ dla $n \geqslant 2$;

b) $a_1 = 1, a_2 = 3$, $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_{n-1} - a_n$ dla $n \geqslant 2$.

8. W pewnej populacji królików każda para zdolna do rozrodu rodzi co miesiąc trzy pary. W chwili ,,zero” jest jedna nowonarodzona para. Zakładając, że króliki są zdolne do rozmnażania po dwóch miesiącach od narodzin, podaj w postaci rekurencyjnej liczbę par królików po n miesiącach.

9. Na ile sposobów można wypełnić prostokąt o wymiarach a) $2 \times m$, b)* $3 \times m$, kostkami o wymiarach 2 na 1? Proszę podać rekurencję, a potem ją rozwiązać.

10. Dana jest pewna liczba $k \geqslant 2$. Znajdź liczbę obszarów a_n, na jakie dzieli płaszczyznę n prostych, z których k jest równoległych, a pozostałe przecinają wszystkie proste. Zakładamy, że żadne trzy proste nie przechodzą przez jeden punkt. Proszę podać rekurencję ze względu na n, zakładając, że k jest ustalone.

11. Podwójna wieża Hanoi składa się z $2n$ krążków, po dwa krążki w każdym z n rozmiarów. Zasady przenoszenia takie jak na wykładzie: mamy trzy pręty, nie można położyć większego krążka na mniejszy. Ile ruchów trzeba co najmniej wykonać, by przenieść wieżę z jednego pręta na drugi?

12. Dany jest pewien ciąg $(a_n)_{n=0}^{\infty}$. Podaj wzór jawny na a_n, jeżeli zwykła funkcja tworząca ciągu (a_n) ma postać:

$$
\begin{array}{ll}
(1) & f(x) = \sum_{i=1}^{\infty}(-x/3)^{i+1} \\
(2) & g(x) = \frac{2x}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{5+x} \\
(3) & f(x) = \frac{1}{1-x-x^2} \\
(4) & s(x) = \sum_{j=0}^{\infty}(3x)^j \sum_{k=1}^{\infty} x^k/k
\end{array}
$$

13. Metodą funkcji tworzących rozwiąż rekurencję

$$a_1 = -2, \quad a_n = 5a_{n-1} - 1, \quad n \geqslant 2.$$

14. 3 Metodą funkcji tworzących wyznacz D_n, jeżeli

$$D_n = nD_{n-1} + 2^n\,,\ n \geqslant 2,\ D_1 = 1.$$

15. Dany jest pewien ciąg $(a_n)_{n=0}^{\infty}$. Podaj wzór jawny na a_n, jeżeli wykładnicza funkcja tworząca ciągu (a_n) ma postać:

$$\begin{array}{ll}
(1) & f(x) = \sum_{n=0}^{100} n x^{n+2} \\
(2) & h(x) = (2x - 3x^2)^2 \\
(3) & h(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-x/3)^{i+1}}{i!} \\
(4) & f(x) = \frac{1}{3-x} \\
(5) & g(x) = \frac{x}{1+x^2} \\
(6) & g(x) = \frac{1}{2+3x} \\
(7) & f(x) = x^2 e^{-2x} \\
(8) & g(x) = x \sum_{i=0}^{\infty} (4x)^i + x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+2}{2} x^k
\end{array}$$

16. Korzystając z funkcji tworzących, znajdź wzór jawny na a_n, jeśli

$$a_0 = 0,\ a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \frac{1}{4} a_{n-1} - a_n \text{ dla } n \geqslant 1.$$

17. Metodą funkcji tworzących wyznacz b_n, jeżeli $b_n = 3n b_{n-1}$ dla $n \geqslant 1$ i $b_0 = 2$.

18. Metodą funkcji tw. rozwiąż rekurencję

$$a_n = a_{n-2} - 3a_{n-1} + 4^n - 1\,, \quad a_0 = 1, a_1 = 0.$$

19. Znajdź równanie rekurencyjne dla a_n – liczby sposobów połączeń w pary wierzchołków wypukłego $2n$-kąta za pomocą nie przecinających się odcinków (boki, przekątne). Następnie korzystając z rozwiązania przykładu z wykładu, o nawiasach ustalających kolejność mnożenia, znajdź wzór jawny na a_n.

20. Zad. 5.6 z podręcznika

21. Zad. 5.7 z podręcznika