KOMBINATORYKA – 3

(ciągi binarne i tożsamości kombinatoryczne)

1. Na ile sposobów można podzielić 109-osobową grupę sportowców na 5 zespołów 11-osobowych i 6 zespołów 9-osobowych, jeśli

(a) wszystkie zespoły mają wykonać to samo ćwiczenie?
(b) każdy zespół ma wykonać inne spośród 11 ćwiczeń?
(c) każdy z zespołów 11-osobowych ma wykonać inne spośród 5 ćwiczeń siłowych a każdy z zespołów 9-osobowych ma wykonać inne spośród 6 ćwiczeń szybkościowych?

Użyj odpowiednich wzorów na N_1, N_2 i N_3.

2. Uzasadnij kombinatorycznie równość:

$$\sum_{t_1+\ldots+t_{10}=n} \frac{n!}{t_1!t_2!\ldots t_{10}!} = 10^n.$$

3. Udowodnij kombinatorycznie, że
$\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k} = \binom{n}{m}\binom{m}{k}$.

4. Oblicz: $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.

5.
Na ile sposobów można wybrać delegację spośród 100 kobiet i 100 mężczyzn, w której kobiet jest więcej niż mężczyzn ?

6. Podaj kombinatoryczne uzasadnienie tożsamości:
a) $\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$
b) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(m-1)^{n-k} = m^n$

7. Udowodnij, że

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{(k!)^2((n-k)!)^2} = \binom{2n}{n}^2.$$

8. Uzasadnij kombinatorycznie nierówność

$$\binom{n}{2}6^{n-2} > 6^n - (5^n + n5^{n-1}), \quad \text{dla } n > 2.$$

Wskazówka: rzuty kostką.

9. Ile jest ciągów binarnych o m zerach i n jedynkach, które kończą się serią jedynek długości k ?

10. Ile jest ciągów o n zerach i m jedynkach, zawierających dokładnie k serii zer ?

11. Ile jest ciągów o n zerach i m jedynkach, w których jest 9 serii, a każda seria ma długość co najmniej 13 ? Zakładamy, że $n, m \geqslant 300$.

12. Ile ciągów $x_1, \ldots, x_{2n+1}$ spełnia 1) dwie pierwsze, 2) wszystkie z poniższych własności ?

(a) $x_1 = x_{2n+1} = 0$,
(b) $|x_i - x_{i-1}| = 1 \quad$ dla $i = 2, \ldots, 2n+1$,
(c) $x_i \geqslant 0 \quad$ dla $i = 1, \ldots, 2n+1$.

13. W ilu ciągach złożonych z k zer i t jedynek żadne dwa zera nie sąsiadują ze sobą ?

14. Wyznacz liczbę ciągów binarnych długości $3n$, w których zer jest dwa razy więcej niż jedynek, serii jedynek jest k, a po każdej serii jedynek występuje niekrótsza od niej seria zer.

15. Oceń poprawność rozwiązania.
Zadanie: Ile jest ciągów binarnych długości n, o $2k$ jedynkach, w których wszystkie serie jedynek mają parzystą długość ?
Rozwiązanie: Najpierw sklejamy jedynki po dwie i otrzymujemy k „superjedynek”. Następnie ustawiamy je w ciąg binarny razem z $n-2k$ zerami, czyli na $\binom{d}{k}$ sposobów, gdzie $d = k + n - 2k$. W ten sposób powstaną wszystkie serie parzyste.

16. Kandydaci A i B uzyskali w wyborach, odpowiednio 55 i 45 głosów. Komisja przelicza głosy w losowej kolejności (każda ze 100! kolejności jest jednakowo prawdopodobna). Oblicz prawdopodobieństwo tego, że przez cały czas liczenia głosów, kandydat A zachowuje przewagę (ma więcej głosów wśród głosów już przeliczonych).