

**KOMBINATORYKA – 14**  
(kombinatoryczna teoria zbiorów)

1. Podać przykład 3 zbiorów  $A_1, A_2, A_3 \subseteq [4]$ , które nie mają systemu różnych reprezentantów.
2. Niech  $A_1, \dots, A_m \subseteq X$ . Udowodnić, że jeżeli dla każdego  $S \subseteq [m]$  zachodzi warunek

$$\left| \bigcup_{i \in S} A_i \right| \geq |S| - d$$

to można znaleźć różnych reprezentantów wszystkich oprócz co najwyżej  $d$  zbiorów.

3. Pokazać, że jeżeli każda z dziewcząt zna dokładnie  $k$  ( $k \geq 1$ ) chłopców a każdy chłopiec zna dokładnie  $k$  dziewcząt, to każdej dziewczynie można przyporządkować innego chłopca.
4. Pokaż, że największa rodzina przecinająca się  $\mathcal{A} \subseteq 2^{[n]}$  ma rozmiar  $2^{n-1}$ . Podaj przykład największej takiej rodziny.
5. Udowodnić drugą część lematu z wykładu: Dla każdego  $r > n/2$  istnieje iniekcja  $g_r : [X]^r \rightarrow [X]^{r-1}$  taka, że dla każdego  $A \in [X]^r$  mamy  $A \supset g_r(A)$ .
6. Uzasadnij, że tw. EKR (obie części) wynika z następującej implikacji: jeśli  $\mathcal{A} \subseteq [X]^k$  jest przecinająca się i  $|\mathcal{A}| = \binom{n-1}{r-1}$ , to  $\mathcal{A} = [X]_x^r$  dla pewnego  $x \in X$ .
7. Podaj przykład 4 zbiorów  $A_1, A_2, A_3, A_4 \subseteq [8]$ , które nie spełniają warunku, że dla każdego  $S \subseteq [8]$  zachodzi warunek

$$\left| \bigcup_{i \in S} A_i \right| \geq |S|.$$

8. Pokaż, że jeżeli każda z dziewcząt zna co najmniej  $k$  ( $k \geq 1$ ) chłopców, a każdy chłopiec zna co najwyżej  $k$  dziewcząt, to każdej dziewczynie można przyporządkować innego chłopca.
9. Sprawdź, czy jeżeli każda z dziewcząt zna co najmniej  $k$  ( $k \geq 1$ ) chłopców, a każdy chłopiec zna co najmniej  $k$  dziewcząt, to każdej dziewczynie można przyporządkować innego chłopca.
10. Uzasadnij, że jeśli system Spernera  $\mathcal{F}$  składa się ze zbiorów mocy nie większej niż  $k$ ,  $1 \leq k \leq n/2$ , to  $|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{k}$ .
11. Wyznacz maksymalną moc systemu Spernera, który zawiera zbiór mocy nie większej niż 2 oraz zbiór mocy nie mniejszej niż  $n - 2$ , i nie zawiera żadnych zbiorów mocy 3, 4, ...,  $n - 3$ .