KOMBINATORYKA – 10
(zasada szufladkowa)

1. Ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ wybieramy $n+1$ liczb. Udowodnij, że zawsze wśród wybranych znajdziemy
a) dwie względnie pierwsze.
b) dwie o sumie $2n+1$.
c) trzy (niekonieczne różne) a, b, c, dla których $a+b=c$.
We wszystkich przypadkach sprawdź, czy twierdzenie zachodzi, jeśli wybieramy n liczb.

2. Pokaż, że wśród 10 punktów rzuconych na trójkąt równoboczny o boku 1 znajdziemy dwa w odległości nie większej niż $1/3$.

3. Wykaż, że dla dowolnego naturalnego n istnieje liczba a złożona tylko z jedynek i zer, która jest podzielna przez n.

4. Uzasadnij, że dla dowolnego 10-elementowego zbioru $M \subseteq \{1, \ldots, 106\}$ istnieją rozłączne, niepuste podzbiory $A, B \subseteq M$ o takiej samej sumie elementów.

5. Macierz 5×65 wypełniono wyrazami ze zbioru $\{-1, 1\}$. Udowodnij, że zawsze znajdziemy
a) 3 identyczne kolumny.
b) 3 wiersze i 3 kolumny, na których przecięciach wszystkie wyrazy są takie same.

6. Mamy dwa koncentryczne dyski, każdy podzielony na 200 sektorów pomalowanych dwoma kolorami. Na zewnętrznym dysku liczba sektorów każdego koloru jest taka sama. Pokazać, że można tak nałożyc dyski na siebie, by uzyskać co najmniej 50% zgodności kolorów.

7. Ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ wybieramy $n+1$ liczb. Udowodnij, że zawsze wśród wybranych znajdziemy
a) dwie różne, których różnica dzieli się przez n.
b) trzy (niekonieczne różne) a, b, c, dla których $a = b - c$.
c)* dwie różne, z których jedna dzieli drugą.

8. Wewnątrz kwadratu o boku 1 umieszczono 51 punktów. Uzasadnij, że znajdziemy wśród nich trzy różne, które leżą w kole o promieniu $1/7$.

9. Każdy punkt okregu malujemy na biało lub czarno. Czy zawsze znajdziemy trzy punkty w jednym z kolorów, które są wierzchołkami trójkąta równobocznego ? A trzy w jednym z kolorów, które są wierzchołkami trójkąta równoramiennego ?

10. n studentów zdawało 6 egzaminów (z różnych przedmiotów). Możliwe oceny to 3,4,5. Znajdź najmniejsze n, dla którego możemy mieć pewność, że przynajmniej 10 studentów zaliczyło egzaminy z takim samym wynikiem (tzn. każdy dostał ten sam multizbiór ocen). Proszę nie zapomnieć o uzasadnieniu, że mniejszego n przyjąć nie można.

11. W ciemnej szufladzie jest s sztućców. Jakie jest najmniejsze n, dla którego możemy mieć pewność, że w szufladzie znajdziemy przynajmniej 7 łyżek, lub przynajmniej 10 noży, lub przynajmniej 5 widelców ? Proszę nie zapomnieć o uzasadnieniu, że mniejszego s przyjąć nie można.

12*. Macierz 5×41 wypełniono wyrazami ze zbioru $\{-1, 1\}$. Udowodnij, że zawsze znajdziemy 3 wiersze i 3 kolumny, na których przecięciach wszystkie wyrazy są takie same.

13. Niech A będzie pewną rodziną 100-elementowych podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, 1000\}$. Wykorzystując technikę podwójnego przeliczania pokaż, że jeżeli każda liczba $k \in \{1, 2, \ldots, 1000\}$ należy do przynajmniej 10 zbiorów z A, to w A jest co najmniej 100 zbiorów.

14. 17 zawodników wzięło udział w turnieju, w którym każdy gra z każdym (raz), a mecze odbywały się w 3 różnych miastach. Udowodnij, że zawsze znajdziemy 3 zawodników, którzy rozegrali wszystkie 3 mecze między sobą w tym samym mieście.