KOMBINATORYKA 1 – WYKŁAD 12
Trójki Steinera, konfiguracje kombinatoryczne, kwadraty łacińskie

22 stycznia 2007

1 Trójki Steinera i Kirkmana

System trójek Steinera (STS) to 3-jednostajny hipergraf na n wierzchołkach taki, że każda para należy do dokładnie jednej krawędzi.

Warunki konieczne dla istnienia: $\binom{n}{2}$ podzielne przez 3 oraz n – nieparzyste, czyli

$$n = 6k + 1 \qquad \text{lub} \qquad n = 6k + 3$$

Problem: Czy to są warunki wystarczające? (postawił Steiner 1853, rozwiązał Reiss 1859; później okazało się, że Kirkman postawił i rozwiązał już w 1847).

Twierdzenie 1 *Jesli $n = 6k + 1$ lub $n = 6k + 3$, to istnieje STS rzędu n.*

Indukcyjny dowód opiera sie na dwóch lematach i pomocniczym pojęciu niepełnego STS (NSTS) (patrz [Lipski, Marek]).

System trójek Kirkmana to STS podzielony na $(n - 1)/2$ klas, każda złożona z $n/3$ rozłącznych trójek, czyli skojarzeń doskonałych. W oryginalnym brzmieniu z 1850 roku dla $n = 15$: *fifteen young ladies in a school walk out three abreast for seven days in succesion: it is required to arrange them daily, such that no two shall walk twice abreast.*

Ogólnie, warunek konieczny: $n/3$ i $(n-1)/2$ muszą być całkowite, a więc $n = 6k + 3$. Ray-Chaudhuri i Wilson udowodnili w 1971, że to jest też warunek dostateczny.

Wariant Sylvestra – faktoryzacja K_n^r: uczennice maja spacerować przez 13 tygodni tak by każde trzy spotkały się w rzędzie dokładnie raz. Dlaczego 13 tygodni? Otóż

$$\binom{15}{3} = 5 \times 7 \times 13.$$

Ogólnie, jest to pytanie o factoryzację hipergrafu pełnego $K_n^{(r)}$, który składa się ze wszystkich $\binom{n}{r}$ r-elementowych podzbiorów. Faktoryzacja to podział na rozłączne skojarzenia doskonałe.

Twierdzenie 2 (Baranyai, 1975) *Jeśli $r|n$, to $K_n^{(r)}$ ma faktoryzację.*

Znaleźć faktoryzację hipergrafu $K_n^{(r)}$ dla $r = 2$.

2 Konfiguracje kombinatoryczne

Przykład : Zawody żużlowe. 16 zawodników startuje po 4 w każdym biegu. Chcemy aby każda para spotkała się tylko raz. Biegów musi więc być 20, bo $\binom{16}{2} = 120 = \binom{4}{2} \times 20$. Szukamy rodziny zbiorów 4-elementowych $(B_1, \ldots, B_{20})$ takich, że każda para elementów należy do dokładnie jednego z nich. (v, k, λ)-*konfiguracją* nazywamy system zbiorów $(X, \mathcal{B})$, gdy

K1. $|X| = v$

K2. $\mathcal{B} \subseteq [X]^k$

K3. $\forall x, y \in X : |\{B \in \mathcal{B} : \{x, y\} \subseteq B\}| = \lambda$

Elementy rodziny $\mathcal{B}$ nazywamy blokami. W przykładzie żużlowym $v = 16$, $k = 4$, $\lambda = 1$. Mamy ponadto dwa inne parametry: $b = |\mathcal{B}|$ i $r = |\{B \in \mathcal{B} : x \in B\}|$ dla każdego $x \in X$. Wyznaczmy wzory na b i r: Stosując metodę dwukrotnego przeliczania, liczba par $(\{x, y\}, B)$, gdzie $\{x, y\} \subseteq B$, wynosi $(v - 1)\lambda$, a także $r(k - 1)$. Stąd,

$$r = \frac{(v-1)\lambda}{k-1} \quad \text{i} \quad b = \frac{vr}{k} = \frac{\lambda v(v-1)}{k(k-1)}.$$

Główny problem: kiedy taka konfiguracja istnieje? mamy taki oto warunek konieczny:

Twierdzenie 3 (Nierówność Fishera) *Zawsze $b \geq v$ (równoważnie, $r \geq k$).*

Warunkami koniecznymi są też odpowiednie podzielności wynikające z wzorów na r i b:

$$k - 1 | \lambda(v - 1), \quad k(k - 1) | \lambda v(v - 1).$$

Nie jest jednak znana pełna charakterystyka warunków na istnienie (v, k, λ)-konfiguracji. Wiadomo kiedy istnieje konfiguracja dla $k \leq 5$ [Lipski, Marek] oraz że podane wyżej podzielności gwarantują istnienie konfiguracji dla dowolnych λ, k, o ile v jest dostatecznie duże.

Konfigurację, dla której $b = v$ nazywamy konfiguracją kwadratową.

Przykład : Degustacja win. 7 degustatorów porównuje 7 gatunków win. Każdy próbuje 3 gatunki, ale tak, by każda para była porównana przez tę samą liczbę degustatorów. Tutaj: $b = v = 7$, $k = 3$, a stąd $r = 3$ i $\lambda = 1$. Np. 124, 235, 346, 457, 156, 267, 137.

Fakt 1 *W każdej konfiguracji kwadratowej każde dwa bloki mają λ wspólnych punktów.*

Dowód: Zadanie domowe! ■

Ważny szczególny przypadek konfiguracji kwadratowych, gdy $\lambda = 1$: *płaszczyzny rzutowe.*

Płaszczyzną rzutową nazywamy parę $(X, \mathcal{B})$ (X zwany jest zbiorem punktów, a $\mathcal{B}$ zbiorem prostych), spełniającą warunki:

K1. Przez każde 2 punkty przechodzi dokładnie 1 prosta.

K2. Każde dwie różne proste mają dokładnie jeden punkt wspólny.

K3. Istnieją 4 różne punkty nie leżące na jednej prostej.

Własności: Każda prosta ma $q+1$ punktów, przez każdy punkt przechodzi $q + 1$ prostych, łacznie jest $q^2 + q + 1$ punktów i tyleż prostych. Liczbę q nazywamy rzędem płaszczyzny rzutowej.

Własność 1 *Płaszczyzny rzutowe to konfiguracje kwadratowe z $\lambda = 1$.*

Przykład : płaszczyzna Fano.

Jeżeli q jest potęgą liczby pierwszej, to istnieje płaszczyzna rzutowa rzędu q. Nie wiadomo, czy istnieją płaszczyzny rzutowe dla innych q.

3 Ortogonalne kwadraty łacińskie

Dwa kwadraty łacińskie (a_{ij}) i (b_{ij}) są ortogonalne, gdy wszystkie pary (a_{ij}, b_{ij}) są różne

Twierdzenie 4 *Istnieje co najwyżej* $n-1$ *ortogonalnych kwadratów łacińskich. Jeśli* n*, jest potęgą liczby pierwszej, to jest ich dokładnie* $n-1$.

Twierdzenie 5 *Istnieje* $n-1$ *ortogonalnych kwadratów łacińskich wgdy istnieje płaszczyzna rzutowa rzędu* n.

Twierdzenie 6 *Jeśli istnieje* t *ortogonalnych kwadratów łacińskich rzędu* n *i tyleż rzędu* m*, to istnieje* t *ortogonalnych kwadratów łacińskich rzędu* mn.

Wniosek: Jeśli rozkład na czynniki pierwsze liczby n wynosi $n = p_1^{a_1}...p_k^{a_k}$, to istnieje $t = \min_i\{p_i^{a_i} - 1\}$ ortogonalnych kwadratów łacińskich.
Zatem dla każdego $n > 1$, $n \not\equiv 2(\mod 4)$ istnieje para ortogonalnych kwadratów łacińskich. A co w przypadku $n \equiv 2(\mod 4)$?

Przykład Eulera: 36 oficerów. 36 oficerów po 6 z każdego z 6 pułków, a jednocześnie po 6 z każdej z 6 rang (porucznik, kapitan, etc.) Czy można ich ustawić w czworobok 6 na 6 tak, by w każdym rzędzie (wiersze i kolumny) każdy pułk i każda ranga były reprezentowane? W 1900 Tarry pokazał, że to jest niemożliwe. Euler przypuszczał, że dla $n \equiv 2(\mod 4)$ nigdy nie istnieje para kwadratów ortogonalnych. Mylił sie. Poza 2 i 6 zawsze istnieje.

Załóżmy, że kwadrat łaciński jest częściowo wypełniony (ale tak, że liczby nie powtarzają się ani w wierszu ani kolumnie). Czy zawsze można go uzupełnić? Tak! (jest to wynik Smetaniuka z 1981r.). Jednym z wariantów problemu uzupełniania kwadratów łacińskich jest Sudoku.