Kombinatoryka

Zestaw 3: ciągi binarne i tożsamości kombinatoryczne

1. Uzasadnij kombinatorycznie tożsamość:
$$\sum_{t_1+\ldots+t_{10}=n} \frac{n!}{t_1!t_2!\ldots t_{10}!} = 10^n.$$

2. Udowodnij kombinatorycznie, że
$\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k} = \binom{n}{m}\binom{m}{k}$.

3. Oblicz: $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.

4. Na ile sposobów można wybrać delegację (dowolnej liczebności) spośród 100 kobiet i 100 mężczyzn, w której kobiet jest więcej niż mężczyzn?

5. Podaj kombinatoryczne uzasadnienie tożsamości:
   (a) $\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$;
   (b) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(m-1)^{n-k} = m^n$.

6. Udowodnij, że
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{(k!)^2((n-k)!)^2} = \binom{2n}{n}^2.$$

7. Uzasadnij kombinatorycznie nierówność
$$\binom{n}{2}6^{n-2} > 6^n - (5^n + n5^{n-1}), \quad \text{dla } n > 2.$$
   Wskazówka: rzuty kostką.

8. W ilu ciągach złożonych z k zer i t jedynek żadne dwa zera nie sąsiadują ze sobą?

9. Ile jest ciągów binarnych o m zerach i n jedynkach, które kończą się serią jedynek długości k?

10. Ile jest ciągów o n zerach i m jedynkach, zawierających dokładnie k serii zer?

11. Ile jest ciągów o n zerach i m jedynkach, w których jest 9 serii, a każda seria ma długość co najmniej 13? Zakładamy, że $n, m \geq 100$.

12. Wyznacz liczbę ciągów binarnych długości $3n$, w których zer jest dwa razy więcej niż jedynek, serii jedynek jest k, a po każdej serii jedynek występuje nie krótsza od niej seria zer.

13. Oceń poprawność rozwiązania.
    Zadanie: Ile jest ciągów binarnych długości n, o $2k$ jedynkach, w których wszystkie serie jedynek mają parzystą długość?
    Rozwiązanie: Najpierw sklejamy jedynki po dwie i otrzymujemy k „superjedynek". Następnie ustawiamy je w ciąg binarny razem z $n-2k$ zerami, czyli na $\binom{n-k}{k}$ sposobów. Po rozklejeniu wszystkich superjedynek na pary jedynek wszystkie serie jedynek będą parzyste.
    Odpowiedź: $\binom{n-k}{k}$

14. Ile ciągów $x_1, \ldots, x_{2n+1}$ spełnia 1) dwie pierwsze, 2) wszystkie z poniższych własności?

(a) $x_1 = x_{2n+1} = 0$,

(b) $|x_i - x_{i-1}| = 1 \quad$ dla $i = 2, ..., 2n+1$,

(c) $x_i \geq 0 \quad$ dla $i = 1, ..., 2n+1$.

15. Kandydaci A i B uzyskali w wyborach, odpowiednio 55 i 45 głosów. Komisja przelicza głosy w losowej kolejności (każda ze 100! kolejności jest jednakowo prawdopodobna). Oblicz prawdopodobieństwo tego, że przez cały czas liczenia głosów, kandydat A zachowa przewagę (będzie mieć więcej głosów wśród już przeliczonych).