# Kombinatoryka

## Zestaw 7: Podziały zbiorów i liczb

$B_n$ – # nieuporządkowanych podziałów zbioru $[n]$ na niepuste podzbiory (# Bella),
$S(n,k)$ – # nieuporządkowanych podziałów zbioru $[n]$ na $k$ niepustych podzbiorów (# Stirlinga 2. rodzaju),
$s(n,k)$ – # Stirlinga 1. rodzaju,
$C(n,k)$ – # permutacji rzędu $n$ o $k$ cyklach,
$P(n,k)$ – # nieuporządkowanych podziałów liczby $n$ na $k$ dodatnich składników.
$P(n)$ – # nieuporządkowanych podziałów liczby $n$ na dodatnie składniki.

1. Sprawdź poprawność wzoru rekurencyjnego na liczby Bella dla $n = 4$.
2. Co jest większe: $P(n,k)$ czy $S(n,k)$?
3. Oblicz $P(n,2)$ i $S(n,2)$
4. Zapisz w postaci cyklicznej permutacje 368921457 i 826479135.
5. Sprawdź, że $|s(4,2)| = C(4,2)$.
6. Oblicz $P(n, n-2)$, $C(n, n-2)$ i $S(n, n-2)$.
7. Uzasadnij kombinatorycznie, że $P(8,5) \leq \binom{7}{4}$ oraz $P(8,5) > \binom{7}{4}/5!$.
8. Uzasadnij, że $P(n,3)$ równa się liczbie podziałów liczby $2n$ na trzy składniki, wszystkie mniejsze niż $n$.
9. Wskaż bijekcje miedzy podziałami symetrycznymi liczby 18 a podziałami liczby 18 na różne i nieparzyste składniki.
10. Udowodnij, że $P(2n,n) = P(n)$,
11. Udowodnij, że $P(n,k) = P(n-1,k-1) + P(n-k,k)$ dla $n \geq k \geq 2$.
12. Udowodnij, że liczba podziałów liczby $n$ na parzyste składniki równa się liczbie podziałów liczby $n$, w których każda liczba występuje parzystą liczbę razy (zero jest liczbą parzystą). Proszę to zrobić

    a) za pomoca diagramow Ferrersa.

    b) bez diagramów Ferrersa.
13. Znajdź funkcę tworzącą dla liczby podziałów $n$ na różne i nieparzyste składniki.
14. Znajdź funkcę tworzącą dla liczby podziałów $n$ na składniki, z których żaden nie występuje więcej niż trzy razy.
15. Przy pomocy funkcji tworzącej wyznacz liczbę

    (a) wszystkich podziałów liczby 10,

    (b) wszystkich podziałów liczby 10 na różne składniki,

    (c) wszystkich podziałów liczby 10 na nieparzyste składniki

    (d) wszystkich podziałów liczby 10 na różne i nieparzyste składniki,