Kombinatoryka

Zestaw 6: Wybory i permutacje z ograniczeniami. Zasada włączania i wyłączania.

1. Na ile sposobów można zamówić r porcji lodów spośród pięciu rodzajów, jeśli nie wolno wziąć więcej niż czterech porcji jednego rodzaju?
2. Na ile sposobów można uzyskać sumę dwudziestu pięciu oczek na dziesięciu różnych kostkach do gry?
3. Na ile sposobów można rozmieścić 25 osób w trzech pokojach, jeśli w każdym pokoju ma być co najmniej 1 osoba?

   a) bez użycia funkcji tworzących,

   b) stosując funkcje tworzące.
4. Znaleźć liczbę wyborów r piłek spośród trzech zielonych, trzech białych, czterech czerwonych i czterech niebieskich (piłki różnią się tylko kolorem). Chodzi o podanie funkcji tworzącej i przepisu jak znaleźć rozwiązanie.
5. Ile jest rozwiązań w liczbach całkowitych nieujemnych równiania

   ßa) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = r$, jeżeli $0 \leq x_i \leq 3$ dla $i = 1, 2, 3, 4$?

   ßb) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 50$, jeżeli $x_3 \geq 30$ i x_4 jest podzielne przez 10? ß

   Chodzi o podanie funkcji tworzącej i przepisu jak znaleźć rozwiązanie. (Przez rozwiązanie rozumiemy czwórki uporządkowane.)
6. Ile jest 40-literowych wyrazów, złożonych z liter a, b, c (litery mogą się powtarzać, nie wszystkie litery muszą wystąpić), które zawierają co najmniej dwie litery a?
7. W konkursie audiotele zostanie rozlosowanych 100 identycznych nagród wśród 1000 uczestników konkursu. Zakładamy, że uczestnicy mogą dostać więcej niż jedną nagrodę. Ile jest wynikow losowania, w ktorych pani Przypadkowa otrzyma nie wiecej niż 3 nagrody?
8. Ile jest liczb od 0 do 999999 o sumie cyfr 45? Proszę tylko podać funkcję tworzącą i przepis na znalezienie rozwiązania.
9. Na ile sposobow można ocenić 6 studentów (skala ocen od 3 do 5) tak, aby co najmniej jednen dostał ocenę bdb, a dst – nie więcej niż trzech studentów?
10. Ile ciągów długości n, zbudowanych z liczb $0, 1, \ldots, 2017$ zawiera co najmniej jedno zero, co najmniej jedną jedynkę i co najmniej jedną dwójkę?
11. Rozdajemy t różnych piłek wśród m dzieci ($t \geq m$). Na ile sposobow możemy to zrobić tak, aby przynajmniej jedno dziecko zostało bez piłki.
12. Na balu jest n małżeństw. W pewnym momencie panowie proszą panie do tańca, ale nie swoje żony. Na ile sposobów mogą to zrobić?
13. Oblicz ile jest liczb naturalnych mniejszych od 700 i względnie pierwszych z 6!.
14. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że graf wybrany losowo spośród wszystkich $\binom{\binom{n}{2}}{m}$ grafów o n wierzchołkach i m krawędziach, nie posiada wierzchołków izolowanych.
15. Szkoła, w której jest 120 uczniów, ma sekcje judo i karate. Liczba uczniów chodzących tylko na judo jest dwa razy większa od liczby tych, którzy chodzą na karate (i być może także na judo). Uczniów nieuczęszczających na żaden kurs jest o 25 więcej niż chodzących na oba kursy. 75 uczniów chodzi na co najmniej jeden kurs. Ilu uczniów uczęszcza na judo, ilu na karate, a ilu jest jednocześnie w obu sekcjach?

16. Do czterech różnych, 5-osobowych samochodów wsiada 9 kobiet i 11 mężczyzn. Oblicz w ilu przypadkach w każdym samochodzie znajdzie sie kobieta.

17. W ilu permutacjach liter słowa MATHEMATICS występuje zbitka MM lub AA lub THE?

18. W ilu permutacjach liczb $1, 2, \ldots, 20$ pierwsza liczba jest większa od 5, a ostatnia jest mniejsza od 15?

19. Ile liczb całkowitych z przedziału od 1 do 250 jest podzielnych przez co najmniej jedna z liczb 3, 4, 6, 10?

20. Sadzamy w rzędzie n małżeństw. W ilu ustawieniach żadne małżeństwo nie siedzi razem? Jak zmieni się wynik, jeśli małżeństwa sadzamy przy okrągłym stole (na nieponumerowanych krzesłach)?

21. Rzucamy n razy dwiema kostkami. Oblicz prawdopodobieństwo, że wśród wyrzuconych par pojawią się wszystkie pary (i, i), $i = 1, 2, \ldots 6$.

22. Siedmiu krasnoludków $K_1, \ldots, K_7$ ma do wykonania jedną z siedmiu prac $P_1, \ldots, P_7$ przy porządkach świątecznych. Krasnoludek K_1 nie może wykonać prac P_2 i P_3, K_2 – prac P_1 i P_5, K_4 – prac P_3 i P_6, K_5 - P_2 i P_7, a K_7 pracy P_4. Krasnoludki K_3 i K_6 moga wykonywać wszystkie prace. Na ile sposobów można przypisać wszystkim krasnoludkom różne prace, po jednej pracy każdemu?

23. Mamy wysłać sześć kartek świątecznych $K_1, \ldots, K_6$ do trzech ciotek C_1, C_2, C_3 i trzech wujów W_1, W_2, W_3, pamiętając, że C_1 nie lubi kartek typu K_2 i K_4, C_2 nie lubi K_1 i K_5, W_1 nie lubi K_2 i K_5, $W_2 - K_4$, a $W_3 - K_6$. Na ile różnych sposobów możemy wysłać kartki do krewnych?

24. Rzucamy sześć razy dwoma różnymi kostkami do gry. Na ile sposobów można otrzymać na każdej kostce wszystkie liczby od 1 do 6, przy założeniu, że nie występują pary:

    $(1, 5), (2, 6), (3, 4), (5, 5), (5, 3), (6, 1), (6, 2)$? (np. $(1, 2), (2, 5), (5, 4), (3, 6), (4, 1), (6, 3)$.)