Kombinatoryka

Zestaw dodatkowy: powtórka

Rozbicia zbiorów

Y–zbiór, $|Y| = n = \sum_{i=1}^{r} t_i$

1) Chcemy rozbić Y na rozróżnialne podzbiory o mocach $t_1, t_2, \ldots, t_r$, $t_i \geq 1$.

   $N_1 = N_1(t_1, t_2, \ldots, t_r) = \#(A_1, A_2, \ldots, A_r)$, gdzie $\bigcup A_i = Y$, $|A_i| = t_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$.

$$N_1 = \binom{n}{t_1}\binom{n-t_1}{t_2} \cdot \ldots \cdot \binom{n-(t_1+\ldots+t_{r-i})}{t_r} = \frac{n!}{t_1!t_2!\ldots t_r!} = \binom{n}{t_1, t_2, \ldots, t_r}$$

   Jest to też wzór na liczbę permutacji z powtórzeniami.

2) Teraz rozbijamy Y na zbiory nierozróżnialne.

   $N_2 = N_2(t_1, t_2, \ldots, t_r) = \#\{A_1, A_2, \ldots, A_r\}$, gdzie $\bigcup A_i = Y$ oraz $\{|A_1|, |A_2|, \ldots, |A_r|\} = \{t_1, t_2, \ldots, t_r\}$ jest multizbiorem.

   Niech $\{s_1, s_2, \ldots, s_l\}$ będzie zbiorem mocy podzbiorów A_i, a k_j to krotność s_j w zbiorze $\{t_1, t_2, \ldots, t_r\}$, tzn. w rozbiciu zbioru Y chcemy mieć k_j podzbiorów mocy s_j, $j = 1, 2, \ldots, l$. Wówczas:

$$N_2 = \frac{N_1}{k_1!k_2!\ldots k_l!}$$

3) W ostatnim przypadku rozbijamy zbiór Y na rozróżnialne podzbiory w taki sposób, że dodatkowo każdy otrzymuje unikatowy numer.

   $N_3 = N_3(t_1, t_2, \ldots, t_r) = \#(A_1, A_2, \ldots, A_r)$, gdzie $\bigcup A_i = Y$ oraz $\{|A_1|, |A_2|, \ldots, |A_r|\} = \{t_1, t_2, \ldots, t_r\}$.

$$N_3 = r!N_2 = \binom{r}{k_1, \ldots, k_l} N_1$$

Przypadki specjalne:

a) Jeśli $t_1 = t_2 = \ldots = t_r$, to $N_2 = \frac{N_1}{r!}$, $N_3 = N_1$.

b) Jeśli $t_i \neq t_j$, $\forall i \neq j$, wówczas $N_2 = N_1$, $N_3 = r!N_1$.

c) Jeśli mamy podzbiory o dwóch różnych mocach $\{t_1, t_2, \ldots, t_2\} = \{k_1 \times s_1, k_2 \times s_2\}$, to

$$N_1 = \frac{n!}{s_1!^{k_1} s_2!^{k_2}}, \quad N_2 = \frac{N_1}{k_1!k_2!}, \quad N_3 = \binom{k_1+k_2}{k_1} N_1 = r!N_2.$$

Twierdzenie o ciągach zdominowancyh

Jeśli $n \leq m$, to liczba ciągów zdominowanych (przez zera), składających się z n jedynek i m zer wyraża się wzorem

$$d(n,m) = \frac{m+1-n}{m+1}\binom{n+m}{m}.$$

Zadania

1. Przelicz rozmieszczenie pięciu przedmiotów w czterech pudełkach. Rozważ wszystkie cztery przypadki dotyczące rozróżnialności.

2. Co jest bardziej prawdopodobne: niewyrzucenie "6" przy czterech rzutach kostką, czy niewyrzucenie pary "(6,6)" przy dwudziestu czterech rzutach dwoma kostkami?

3. Grupę 20 aktywistów, w której jest 4 mieszkańców Poznania, dzielimy na cztery 5–osobowe delegacje, przy czym ważny jest dla nas jedynie skład delegacji, a nie uporządkowanie osób w grupach czy kolejność delegacji. Ile jest takich podziałów, w których
   (a) w każdej delegacji jest jeden poznaniak?
   (b) w jednej delegacji jest jeden poznaniak, a w innej trzej pozostali?

4. Ile słów 10-literowych można utowrzyć mając do dyspozycji cztery litery a, cztery b i cztery c? A ile, gdy zamiast czterech będziemy mieć do dyspozycji po dziesięć liter każdego rodzaju?

5. Uzasadnij kombinatorycznie nierówność
$$\binom{n}{2}6^{n-2} > 6^n - (5^n + n5^{n-1}), \text{ dla } n > 2.$$

6. Wyznacz liczbę ciągów binarnych długości $3n$, w których zer jest dwa razy więcej niż jedynek, serii jedynek jest k, a po każdej serii jedynek występuje nie krótsza od niej seria zer.

7. Ile ciągów $x_1, x_2, \ldots, x_{2n+1}$ spełnia 1) dwie pierwsze, 2) wszystkie z poniższych własności?
   (a) $x_1 = x_{2n+1} = 0$,
   (b) $|x_i - x_{i-1}| = 1$, dla $i = 2, 3, \ldots, 2n+1$,
   (c) $x_i \geq 0$, dla $i = 1, 2, \ldots, 2n+1$.

8. Wkładamy 100 książek do pudełek, w których mieści się odpowiednio 5, 10 i 20 książek, przy czym pudełka z zewnątrz wyglądają identycznie. Dysponujemy czterema pudełkami, w których mieści się 5 książek, czterema, w których mieści się 10 i dwoma, w których mieści się 20.
   (a) Ile różnych zestawów paczek z książkami możemy w ten sposób utworzyć?
   (b) Losowo wysyłamy pudełka do 10 różnych osób. Ile mamy możliwych scenariuszy obdarowania każdej z tych osób jedną paczką.
   (c) Zosia pokolorowała pudełka dziesięcioma różnymi kolorami. Ile teraz możemy utworzyć różnych zestawów paczek?

9. W ilu liczbach 8–cyfrowych (bez zer)
   (a) największą cyfrą jest 5?
   (b) najmniejszą cyfrą jest 5?

10. W kolejce po bilety w cenie 10 złotych ustawiło się $n+m$ osób, z których n ma tylko banknoty 10–złotowe, a m tylko bankonty 20–złotowe ($m \leq n+1$). Wszyscy kupują po jednym bilecie. Przed rozpoczęciem sprzedaży w kasie nie było pieniędzy. Jakie jest prawdpodobieństwo, że nikt z kolejki nie będzie musiał czekać na resztę?

11. Pokaż, że
$$\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{r} = \binom{n+1}{r+1} - \binom{m}{r+1}.$$

12. Uzasadnij kombinatorczynie
$$m^n = \sum_{n=t_1+\ldots+t_m} \binom{n}{t_1, \ldots, t_m}, \text{ gdzie } t_i \geq 0.$$