Kombinatoryka

Zestaw 10: Zasada szufladkowa

0. W głębokiej szufladzie mamy 10 par różnych skarpetek. Ile z nich trzeba wyłowić, by znaleźć parę?

1. Dowieść, że wśród dowolnych siedmiu liczb całkowitych zawsze są dwie takie, że różnica ich kwadratów jest podzielna przez 10.

2. W turnieju bierze udział 100 pingpongistów. Pierwszego dnia każdy rozegrał 32 mecze. Wykazać, że co najmniej czterech zawodników osiągnęło tyle samo zwycięstw.

3. Ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ wybieramy $n+1$ różnych liczb. Udowodnij, że wśród wybranych liczb zawsze znajdziemy

   a) dwie o sumie $2n+1$,

   b) dwie, których różnica dzieli się przez n,

   c) dwie względnie pierwsze,

   d) dwie, z których jedna dzieli drugą.

   We wszystkich przypadkach sprawdź, czy twierdzenie zachodzi, jeśli zamiast $n+1$ wybieramy n liczb.

4. Udowodnij, że

   a) W dowolnym ciągu n liczb całkowitych istnieje segment (=podciąg kolejnych) o sumie podzielnej przez n.

   b) Wśród dowolnych $n+1$ liczb całkowitych, istnieją dwie, których różnica jest podzielna przez n.

5. Pokaż, że wśród 10 punktów rzuconych na trójkąt rownoboczny o boku 1 zawsze znajdziemy dwa w odległości nie większej niż $1/3$.

6. Wewnątrz kwadratu o boku 1 umieszczono 51 punktów. Uzasadnij, że znajdziemy wśród nich trzy, które leżą w kole o promieniu $1/7$.

7. Uzasadnij, że dla dowolnego 10-elementowego zbioru $M \subset \{1, \ldots, 106\}$ istnieją rozłączne, niepuste podzbiory $A, B \subset M$ o takiej samej sumie elementów. Czy można zastąpić 10 przez 9 lub 106 przez 107?

8. Sześć egzaminów (z różnych przedmiotów) zdawało n studentów. Możliwe oceny to 3,4,5. Znajdź najmniejsze n, dla którego możemy mieć pewność, że przynajmniej 10 studentów zakończyło sesję z takim samym wynikiem (tzn. każdy dostał ten sam multizbiór ocen). Proszę uzasadnić, że mniejszego n przyjąć nie można.

9. W ciemnej szufladzie jest s sztućców. Jakie jest najmniejsze n, dla którego możemy mieć pewność, że w szufladzie znajdziemy przynajmniej 7 łyżek lub przynajmniej 10 noży lub przynajmniej 5 widelców? Proszę uzasadnić, że mniejszego n przyjąć nie można.

10. Mamy dwa koncentryczne dyski, każdy podzielony na 200 równych sektorów pomalowanych dwoma kolorami. Na zewnętrznym dysku liczba sektorów każdego koloru jest taka sama. Pokazać, że można tak nałożyć dyski na siebie, by uzyskać co najmniej 50% zgodności kolorów.

11. Niech A będzie pewną rodziną 100-elementowych podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, 1000\}$. Wykorzystując technikę podwójnego przeliczania pokaż, że jeżeli każda liczba $k \in \{1, 2, \ldots, 1000\}$ należy do przynajmniej 10 zbiorów tej rodziny, to w A jest co najmniej 100 zbiorów.

12. Siedemnastu zawodników wzięło udział w turnieju, w którym każdy grał z każdym (raz), a mecze odbywały się w 3 różnych miastach. Udowodnij, że jest 3 zawodników, którzy rozegrali wszystkie 3 mecze mędzy sobą w tym samym mieście.

13. Macierz 5×65 wypełniono wyrazami ze zbioru $\{-1, 1\}$. Udowodnij, że zawsze znajdziemy

    a) 3 identyczne kolumny,

    b) 3 wiersze i 3 kolumny, na przecięciach których wszystkie wyrazy są takie same.

14. (trudne!) Macierz 5×41 wypełniono wyrazami ze zbioru $\{-1, 1\}$. Udowodnij, że zawsze znajdziemy 3 wiersze i 3 kolumny, na przecięciach których wszystkie wyrazy są takie same.

15. (trudne!) Wykaż, że wśród dowolnych $n + 2$ liczb całkowitych istnieją dwie, których suma lub różnica jest podzielna przez $2n$.

16. (trudne!) Wykaż, ze dla dowolnego naturalnego n istnieje liczba a złożona tylko z jedynek i zer, która jest podzielna przez n.

17. Udowodnić, że każdy turniej posiada przynajmniej 1 ścieżkę Hamiltona. Wskaz.: ind. mat.; nie stosować zasady szufladkowej!