Kombinatoryka

Zestaw 1: prawa i metody przeliczania

1. Rzucamy trzema kostkami do gry: zieloną, czerwoną i niebieską.

   a) Ile różnych wyników możemy otrzymać?

   b) W ilu wynikach nie uzyskamy tej samej liczby oczek na wszystkich trzech kostkach?

   c) W ilu wynikach wszystkie trzy liczby oczek są różne?

2. a) Ile jest liczb 5-cyfrowych?

   b) Ile liczb 5-cyfrowych zawiera dokładnie jedną trójkę?

   c) Ile jest takich liczb 5-cyfrowych, które są palindromami, tzn. niezależnie od kierunku czytania przedstawiają ten sam wynik?

3. a) Ile jest parzystych liczb 5-cyfrowych?

   b) Ile liczb 5-cyfrowych parzystych zawiera dokładnie jedną trójkę?

   c) Ile jest parzystych liczb 5-cyfrowych, które są palindromami?

4. Na ile sposobów możemy utworzyć niepustą paczkę mając do dyspozycji pięć identycznych jabłek i osiem identycznych brzoskwiń?

5. Ile różnych liczb można utworzyć sumując dwie lub więcej spośród liczb:

   a) 1,3,5,10,20,50,90?

   b) 1,3,5,10,20,50,82?

6. Ile różnych liczb można utworzyć mnożąc dwie lub więcej spośród liczb:

   a) 2,2,3,5,5,7,7,7?

   b) 2,2,3,5,5,6,6,6?

7. Spośród pięciu różnych książek hiszpańskich, sześciu francuskich i ośmiu włoskich wybieramy dwie. Na ile sposobów możemy je wybrać tak, aby nie byly napisane w tym samym języku?

8. Na ile sposobow można wybrać kolejno dwie karty z talii 52 kart tak, aby

   a) pierwszą kartą był as, a drugą nie była dama,

   b) pierwszą była karta koloru karo, a drugą nie była dama?

9. Są 3 różne, bezpośrednie drogi z miasta A do miasta B, 2 różne, bezpośrednie drogi z B do miasta C i 4 różne, bezpośrednie drogi z A do C. Na ile sposobów można dojechać (bezpośrednio lub pośrednio przez B)

   a) z A do C i z powrotem?

   b) z A do C i z powrotem, nie przejeżdżając żadnego odcinka trasy dwa razy?

10. Na ile sposobów możemy rozmieścić k rozróżnialnych kul w n oznaczonych szufladkach, przy założeniu, że każda szufladka zawiera co najwyżej jedną kulę?

11. W kapeluszu jest n losów. Wszystkie wygrywają, a każda nagroda ma inną wartość, od 1 do n tysięcy. Ustalmy liczbę naturalną $k \leq n$. Na ile sposobów możemy wylosować dwie różne nagrody tak, aby jedna była mniej, a druga więcej warta niż k tysięcy? Zakładamy, że

    a) wyciągamy losy jednocześnie,

    b) wyciągamy losy kolejno.

12. Na ile sposobów można ustawić dwa różne króle na szachownicy o wymiarach $n \times m$ tak, aby nie stały na sąsiadujących polach ?

13. Rozdajemy k różnych piłek wśród n dzieci. Wskazać bijekcję pomiędzy zbiorem wszystkich możliwych wyników tej akcji a zbiorem ciągów k - elementowych o wyrazach ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$.

14. Wskaż bijekcję między następującymni rodzinami obiektów kombinatorycznych:

    (1) rozmieszczenia k identycznych kul w n oznaczonych szufladkach niepozostawiające żadnej szufladki pustej,

    (2) podziały liczby k na n uporządkowanych, całkowitoliczbowych i dodatnich składników,

    (3) ciągi binarne złozone z $n - 1$ jedynek i $k - n$ zer.

15. Wskazać bijekcję między zbiorem wszystkich funkcji działających ze zbioru k-elelementowego w zbiór n-elementowy a zbiorem wszystkich rozmieszczeń k rozróżnialnych elementów w n oznaczonych szufladkach.

16. Wskazać bezpośrednią bijekcję między rozwiązaniami równania $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$ a rozwiązaniami równania $y_1 + \cdots + y_7 = 3$ w nieujemnych liczbach całkowitych (patrz przykład 2.6 z wykładu/podręcznika).