KOMBINATORYKA 1 – Struktury kombinatoryczne

22 stycznia 2018

1 Zbiory częściowo uporządkowane

Niech X będzie dowolnym zbiorem (niekoniecznie skończonym). Relację binarną $\preceq$ na zbiorze X nazywamy *częściowym porządkiem*, gdy jest ona zwrotna, przechodnia i antysymetryczna, a parę $(X, \preceq)$ nazywamy *zbiorem częściowo uporządkowanym* lub, używając angielskiego skrótu, *posetem*. Jeżeli $x \preceq y$ i $x \neq y$, to piszemy $x \prec y$. Zamiast $x \preceq y$ i $x \prec y$, możemy pisać również $y \succeq x$ i $y \succ x$. Jeżeli $x \preceq y$ lub $y \preceq x$, to mówimy, że elementy x i y są *porównywalne*.

Skończony zbiór częściowo uporządkowany można reprezentować za pomocą grafu skierowanego.

Przykład 1: Graf porównań

Niech $X = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Określmy relację częściowego porządku na X w następujący sposób:

$$\begin{aligned}
&a \preceq b,\ a \preceq c,\ a \preceq d,\ a \preceq e,\ a \preceq f,\ a \preceq g,\ a \preceq h\\
&b \preceq c,\ b \preceq d,\ b \preceq e,\ b \preceq f,\ b \preceq h\\
&c \preceq e,\ c \preceq f\\
&d \preceq e,\ d \preceq f,\ d \preceq h\\
&e \preceq f\\
&g \preceq f,\ g \preceq h
\end{aligned}$$

Ten częściowo uporządkowany zbiór $(X, \preceq)$ możemy przedstawić w postaci grafu skierowanego zwanego *grafem porównań*, przyjmując, że jeżeli $x \preceq y$, to istnieje łuk skierowany od wierzchołka x do wierzchołka y. Proszę ten graf narysować na ćwiczeniach.

Drugim, bardziej czytelnym, sposobem reprezentacji skończonego zbioru częściowo uporządkowanego jest *diagram Hassego*. W celu jego opisania musimy wprowadzić pojęcie bezpośredniego następnika (lub poprzednika) danego elementu. Otóż, jeżeli $x \prec y$ oraz dla dowolnego $z \in X$

$$(x \preceq z) \wedge (z \preceq y) \Rightarrow (z = x) \vee (z = y), \tag{1}$$

to piszemy $x \precnsim y$ i mówimy, że y jest *bezpośrednim następnikiem* elementu x (lub x jest *bezpośrednim poprzednikiem* elementu y).

Możemy teraz przejść do reprezentacji zbioru częściowo uporządkowanego $(X, \preceq)$ za pomocą grafu skierowanego zwanego *diagramem Hassego*. Wierzchołki tego grafu odpowiadają elementom należącym do zbioru X, przy czym (x, y) jest łukiem grafu wtedy i tylko wtedy, gdy x jest *bezpośrednim* poprzednikiem y. Można jednak pominąć skierowanie krawędzi, przyjmując zasadę, że jeśli $x \precnsim y$, to wierzchołek y znajduje się na diagramie wyżej od wierzchołka x. Wówczas $x \preceq y$ wtedy i tylko wtedy, gdy w diagramie Hassego istnieje śieżka „w górę" od wierzchołka x do wierzchołka y.

Przykład 1 (cd). Diagram Hassego

Niech $(X, \preceq)$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym z przykładu 1. Proszę narysować diagram Hassego dla tego zbioru.

Przykład 2. Podzbiory zbioru skończonego

Niech X będzie skończonym zbiorem, $|X| = n$. Wtedy $\mathcal{B}(n) = (2^X, \subseteq)$ jest posetem, zwanym też *kratą boolowską*. Narysować $\mathcal{B}(n)$ dla kilku małych wartości n.

Przykład 3. Podziały zbioru skończonego na podzbiory

Niech X będzie skończonym zbiorem, $|X| = n$, a $\Pi(X)$ rodziną wszystkich podziałów zbioru X na niepuste i parami rozłączne podzbiory (kolejność podzbiorów nieistotna). Dla $\pi_1, \pi_2 \in \Pi$, piszemy $\pi_1 \preceq \pi_2$, gdy podział π_1 jest *rozdrobnieniem* podziału π_2, tzn. każdy blok podziału π_1 jest podzbiorem pewnego bloku podziału π_2. Wtedy $\mathcal{P}(n) = (\Pi(X), \preceq)$ jest posetem. Narysować $\mathcal{P}(n)$ dla kilku małych wartości n.

Niech $(X, \preceq)$ będzie dowolnym zbiorem częściowo uporządkowanym i niech $Y \subset X$. Oznaczmy przez $\preceq_Y$ obcięcie porządku $\preceq$ do zbioru Y. Wtedy $(Y, \preceq_Y)$ jest też posetem.

Przykład 4. Liczby naturalne z relacją podzielności

Piszemy $m|n$ gdy n jest podzielne przez m. Para $(\mathbb{N}, |)$ jest posetem. Narysować diagram Hassego dla obcięcia $(Y, |_Y)$ posetu $(\mathbb{N}, |)$ do zbioru $Y = \{1, 2, \ldots, 13\}$.

Jeżeli $\preceq_Y$ jest porządkiem liniowym (tzn. każde dwa elementy należące do Y są porównywalne), to zbiór Y nazywamy *łańcuchem*. Innymi słowy, łańcuch to zbiór, który jest liniowo uporządkowany przez częściowy porządek. W przypadku, gdy żadne dwa elementy zbioru Y nie są porównywalne, to Y nazywamy *antyłańcuchem*.

Przykładami łańcuchów w zbiorze częściowo uporządkowanym z przykładu 1 są abc, abe, af, g, a antyłańcuchów: eh, g i cdg.

Twierdzenie 1 (Dualne Twierdzenie Dilwortha) *W dowolnym skończonym zbiorze częściowo uporządkowanym X minimalna liczba antyłańcuchów pokrywających zbiór X jest równa maksymalnej mocy łańcucha.*

Wniosek 1 (Lemat Dilwortha) *Jeśli $|X| \geq ab+1$ to X ma łańcuch mocy $a+1$ lub antyłańcuch mocy $b+1$.*

Na ćwiczeniach proszę udowodnić twierdzenie 1 oraz wywnioskować wniosek 1 z twierdzenia 1. Wnioskiem z Wniosku 1 jest znany nam już wynik.

Wniosek 2 (Tw. Erdősa i Szekeresa) *Niech a, b będą liczbami naturalnymi, $n = ab + 1$ i niech $x_1, x_2, \ldots, x_n$ będzie dowolnym ciągiem n liczb rzeczywistych. Wówczas ciąg ten zawiera rosnący (malejący) podciąg złożony z $a+1$ elementów lub malejący (rosnący) podciąg złożony z $b+1$ elementów.*

Dowód: Wynika z Wniosku 1 zastosowanego do częściowego porządku, w którym $x_i \preceq x_j$ wgdy $i < j$ i $x_i \leq x_j$. ■

Teraz podamy bez dowodu najważniejsze twierdzenie tego rozdziału. Jest ono dualne do Dualnego Tw. Dilwortha.

Twierdzenie 2 (Twierdzenie Dilwortha, 1950) *W dowolnym skończonym zbiorze częściowo uporządkowanym X minimalna liczba łańcuchów pokrywających X jest równa maksymalnej mocy antyłańcucha.*

2 Systemy różnych reprezentantów

Niech X będzie zadanym zbiorem. Oznaczmy przez 2^X rodzinę wszystkich podzbiorów zbioru X. *Rodziną zbiorów* albo *hipergrafem* nazywamy uporządkowaną parę zbiorów $(X, \mathcal{F})$, gdzie $\mathcal{F} \subset 2^X$. *Systemem różnych reprezentantów (SRR)* rodziny $(X, \mathcal{F})$, gdzie $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ nazywamy *ciąg m różnych* elementów, po jednym z każdego zbioru A_i. Na przykład, jeżeli

$$A_1 = \{2,4\}, \quad A_2 = \{1,2,3\}, \quad A_3 = \{2,3,4\}, \quad A_4 = \{1,4\},$$

to ciąg $(2,1,3,4)$ jest systemem różnych reprezentantów tej rodziny. Zauważmy przy okazji, że pytanie z 1. wykładu, czy można dopasować kandydatów do stanowisk pracy w taki sposób, by każdy otrzymał pracę zgodnie ze swoimi uprawnieniami, jest pytaniem, czy dla rodziny zbiorów $\{s,i\}$, $\{s,d\}$, $\{s,d\}$, $\{m,s,c,i\}$, $\{b,i\}$ istnieje system różnych reprezentantów. Odpowiedź brzmi, że tak.

Z drugiej strony, rodzina zbiorów

$$A_1 = \{1,2\}, \quad A_2 = \{1,3\}, \quad A_3 = \{1,4\},$$

$$A_4 = \{1,2,3\}, \quad A_5 = \{5,6\}, \quad A_6 = \{2,3\},$$

nie ma systemu różnych reprezentantów. Rzeczywiście, wystarczy zauważyć, że cztery zbiory A_1, A_2, A_4 i A_6 mają łącznie tylko trzy różne elementy.

Ta obserwacja pokazuje, że aby rodzina $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ miała system różnych reprezentantów, *każda* podrodzina rodziny $\mathcal{F}$ musi zawierać *co najmniej* tyle elementów, ile zbiorów A_i wchodzi w skład tej podrodziny. Dokładniej, jeśli $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ jest systemem różnych reprezentantów rodziny zbiorów $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$, to dla każdego podzbioru indeksów $S \subset [m]$ zachodzi warunek

$$\left| \bigcup_{i \in S} A_i \right| \geq \left| \bigcup_{i \in S} \{x_i\} \right| = |S|.$$

Ten warunek konieczny jest jednocześnie warunkiem dostatecznym, co głosi słynne twierdzenie Halla.

Twierdzenie 3 (Hall, 1935) *Rodzina* $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ *ma system różnych reprezentantów wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego* $S \subseteq [m]$

$$\left|\bigcup_{i\in S} A_i\right| \geq |S|. \tag{2}$$

3 Systemy Spernera

Systemem Spernera (SS) podzbiorów zbioru $X = [n]$ nazywamy rodzinę zbiorów, z których żaden nie zawiera się w drugim. Krótko, jest to antyłańcuch posetu $(2^X, \subseteq)$.

Problem: Wyznaczyć

$$\alpha_n = \max\{|\mathcal{F}| : ([n], \mathcal{F}) \text{ jest SS }\}$$

Jest to klasyczny problem ekstremalnej teorii zbiorów, której celem jest wyznaczanie minimalnej bądź maksymalnej mocy rodzin o zadanych własnościach.

Zauważmy, że dla każdego k mamy $\alpha_n \geq \binom{n}{k}$, zatem

$$\alpha_n \geq \max_k \binom{n}{k} = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

Twierdzenie 4 (Twierdzenie Spernera, 1928)

$$\alpha_n = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$$

Dowód: Niech $X = [n]$. Pokażemy, że poset $(2^X, \subseteq)$ można rozbić na $\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}$ łańcuchów, co na podstawie tw. Dilwortha zakończy dowód. Zauważmy, że $2^X = \bigcup_{r=0}^{n} \binom{X}{r}$ oraz, że

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \cdots < \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil} > \cdots > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n}.$$

Stosując tw. Halla można udowodnić (ćw.) następujący lemat.

Lemat 1 *Dla każdego* $r < n/2$ *istnieje iniekcja* $f_r : \binom{X}{r} \to \binom{X}{r+1}$ *taka, że dla każdego* $A \in \binom{X}{r}$ *mamy* $A \subset f_r(A)$*. Podobnie, dla każdego* $r > n/2$ *istnieje iniekcja* $g_r : \binom{X}{r} \to \binom{X}{r-1}$ *taka, że dla każdego* $A \in \binom{X}{r}$ *mamy* $A \supset g_r(A)$*.*

Ten lemat pozwala skonstruować łańcuchy $\mathcal{L}_1, \dots \mathcal{L}_{\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}}$ przez zlepianie skojarzeń $(A, f_r(A))$ i $(g_r(A), A)$. W przypadku parzystego n, uzupełniamy je o nieskojarzone elementy ze środkowego poziomu $\binom{X}{n/2}$ (zrób rysunek). ■

Uogólnieniem twierdzenia Spernera, ale za to z prostszym dowodem jest nierówność LYM.

Twierdzenie 5 (Lubell 1966, Yamamoto 1954, Mieszalkin 1963) *Jeśli* $([n], \mathcal{F})$, *gdzie* $\mathcal{F} = \{A_1, ..., A_m\}$, *jest SS, a* $a_k = |\mathcal{F} \cap \binom{[n]}{k}|$, $k = 0, 1, ..., n$, *to*

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\binom{n}{|A_i|}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{\binom{n}{k}} \leq 1$$

Dowód błyskawiczny: Niech Π_i będzie zbiorem tych permutacji zbioru $[n]$, których początkowy segment długości $|A_i|$ składa się z elementów zbioru A_i, $i = 1, \dots, m$. Ponieważ $\mathcal{F}$ jest SS, to zbiory $\Pi_1, \dots, \Pi_m$ są parami rozłączne i, co za tym idzie, $|\Pi_1| + \dots |\Pi_m| \leq n!$. Ponadto, łatwo obliczyć, że $|\Pi_i| = |A_i|!(n - |A_i|)!$. Dzieląc stronami przez $n!$, otrzymujemy nierówność LYM. ■

Ponieważ

$$\frac{m}{\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}} \leq \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\binom{n}{|A_i|}} \leq 1 ,$$

to tw. Spernera wynika z nierówności LYM.

4 Rodziny przecinające się

Rodzinę $\mathcal{A} \subseteq 2^X$ nazywamy *przecinającą się*, gdy dla dowolnych $A, B \in \mathcal{A}$ mamy $A \cap B \neq \emptyset$. Łatwo pokazać, że największa rodzina przecinająca się $\mathcal{A} \subseteq 2^{[n]}$ ma rozmiar 2^{n-1} (ćwiczenia).

Teraz ograniczymy się tylko do zbiorów mocy r, to znaczy, do elementów rodziny $\binom{[n]}{r}$. Cała rodzina $\binom{[n]}{r}$ jest przecinająca się, gdy $r > n/2$, a gdy $r = n/2$, to z każdej pary zbiorów dopełniających się A, A^c trzeba odrzucić jeden. Zatem, w tym przypadku największa rodzina przecinająca się ma moc $\frac{1}{2}\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1}$. Najciekawszy jest przypadek $r < \frac{n}{2}$.

Niech $X = [n]$. Dla $x \in X$, oznaczmy przez $\binom{X}{r}_x$ rodzinę wszystkich $\binom{n-1}{r-1}$ zbiorów rodziny $\binom{X}{r}$, które zawierają element x. Oczywiście, taka rodzina jest przecinająca się, a co więcej, jest maksymalna (w sensie zawierania) o tej własności. Poniższe, klasyczne twierdzenie pokazuje, że jest to (jedyna co do izomorfizmu) największa rodzina przecinająca się.

Twierdzenie 6 (Erdős, Ko, Rado, 1961) *Niech* $2 \leq r < n/2$. *Wtedy*

(a) każda przecinająca się rodzina $\mathcal{A} \subseteq \binom{X}{r}$ *ma moc nie większą niż* $\binom{n-1}{r-1}$,

(b) ograniczenie to jest osiągnięte tylko przez rodziny postaci $\binom{X}{r}_x$.

Dowód (Katona, 1972): Udowodnimy tylko część (a). Niech $\mathcal{A} \subseteq \binom{X}{r}$ będzie przecinającą się rodziną zbiorów. Dla dowolnej permutacji cyklicznej σ zbioru X (jest ich $(n-1)!$), każdy zbiór kolejnych elementów nazywamy segmentem. Niech x_σ będzie liczbą wszystkich zbiorów rodziny $\mathcal{A}$ będących segmentami w permutacji cyklicznej σ. Ponieważ $\mathcal{A}$ jest przecinająca się, to $x_\sigma \leq r$ (ćw.). Z drugiej strony, każdy zbiór mocy r jest segmentem w dokładnie $r!(n-r)!$ permutacjach cyklicznych. Stosując metodę dwukrotnego przeliczania, otrzymujemy więc równość

$$\sum_\sigma x_\sigma = |\mathcal{A}|r!(n-r)!,$$

z której wynika, że

$$|\mathcal{A}| \leq \frac{r(n-1)!}{r!(n-r)!} = \binom{n-1}{r-1}.$$

■

Proszę pokazać na ćwiczeniach, że tw. 6 (obie części) wynika z następującej implikacji: jeśli $\mathcal{A}$ jest przecinająca się i $|\mathcal{A}| = \binom{n-1}{r-1}$, to $\mathcal{A} = \binom{X}{r}_x$ dla pewnego $x \in X$.