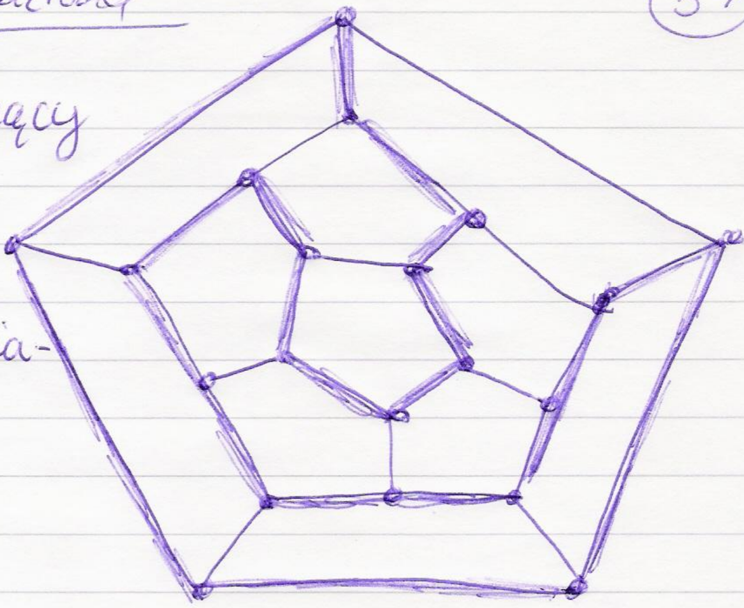
Łamigłówka sir Hamiltona

Znaleźć cykl przechodzący przez wszystkie wierzchołki dwunastościanu!



Def Cykl Hamiltona w grafie G to cykl długości $|V|$ zawarty w G.

Rozstrzygnięcie czy graf ma cykl Hamiltona jest problemem b. trudnym!

Brak charakteryzacji jak TW1 dla obchodu Eulera.

Tylko warunki konieczne:

Jeśli G ma cykl Ham., to ...

(w transpozycji: jeśli ..., to G nie ma cyklu Ham.)

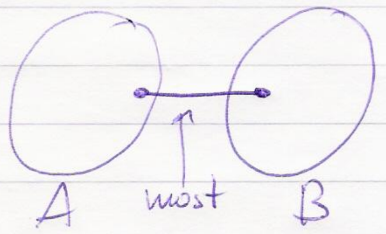
i warunki dostateczne:

Jeśli ..., to G ma cykl Ham.

Prz3. Jeśli jakiś wierzchołek w G ma ≥ 3 sąsiadów stopnia 2, to G nie ma cyklu Ham.

TW 4 Jeśli G ma most, to G nie ma cyklu Ham. (58)

d:



cykl Ham., gdyby istniał, musiałby przejść z A do B i z powrotem, ale między A i B jest tylko 1 krawędź. □

TW 5 (Ore, 1960) Jeśli $\forall \{x,y\} \notin E,\ x \neq y$:

$$d_G(x) + d_G(y) \geq |V|, \quad \leftarrow \text{warunek Ore}$$

to G ma cykl Hamiltona

Zamiar dowodu - algorytm:

WE: Graf $G=(V,E)$ spełniający warunek Ore

(1) Startując z dowolnego wierzchołka, zbuduj zachłannie maksymalną (w sensie zawierania) ścieżkę P, $V(P) = (y_1, \dots, y_m)$ — kolejność ważna!

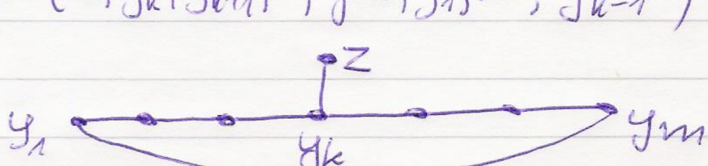
(2) (i) Jeśli $y_1 y_m \notin E$, idź do (3)

(ii) Jeśli $m=n$, weź $C = \{y_1, \dots, y_m\}$

(iii) Znajdź $z \in V(G) \setminus V(P)$ oraz $y_k \in V(P)$: $zy_k \in E$

Podstaw $V(P) = (z, y_k, y_{k+1}, \dots, y_m, y_1, \dots, y_{k-1})$

Idź do (2)

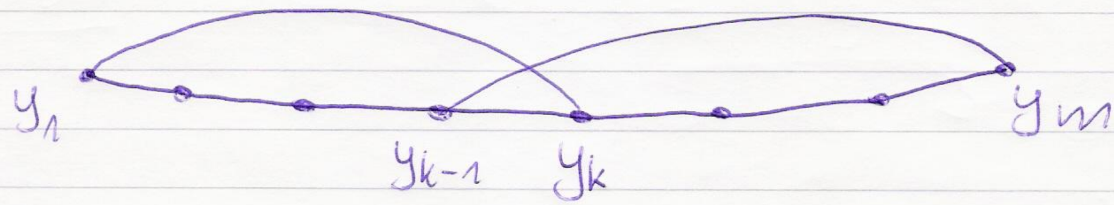


(3) Znajdź y_k, $1 < k < m$, $y_1 y_k \in E$ i

$y_{k-1} y_m \in E$

Podstaw $V(P) = (y_1, \dots, y_{k-1}, y_m, y_{m-1}, \dots, y_k)$

Idź do (2)(ii)



<u>WY</u>: cykl Ham. C z p. (2)(ii).

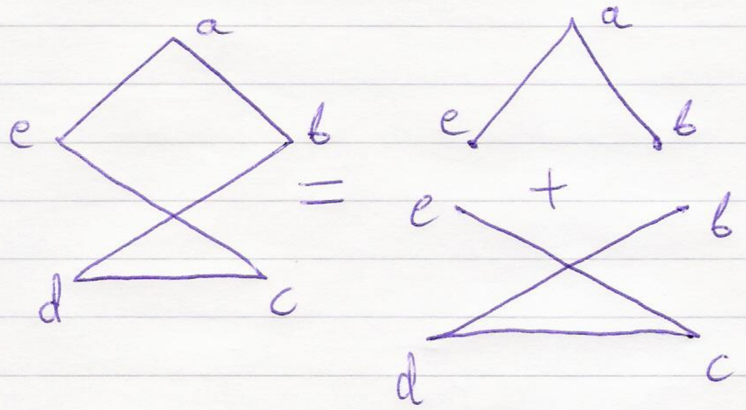
Warunek Ore implikuje spójność (ćw.), z której wynika istnienie z w 2(iii).

Warunek Ore implikuje istnienie y_k w (3). □

<u>Problem Komiwojażera</u>: W grafie ważonym (G, w) znaleźć ~~ta~~ cykl Ham. o minimalnej wadze.

Wartość rozwiązania można oszacować z dołu poprzez MST (min. rozpięte drzewo).

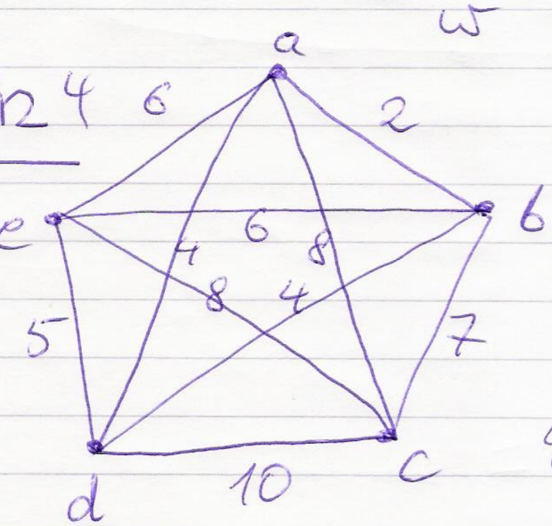
Otóż każdy cykl Ham. można rozłożyć na sumę 2 ścieżek: P_3 i P_{n-1} o wspólnych końcach (patrz rysunek)



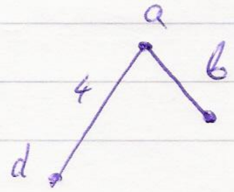
$w(P_3) \geq$ suma 2 najlżejszych krawędzi incyd. z a

$w(P_{n-1}) \geq$ waga minimalnego rozpiętego drzewa w $G - a$

Pr 4

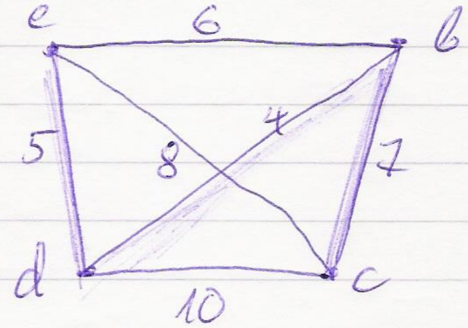


$w(P_3) \geq 2+4=6$



$w(P_{n-1}) \geq$

$4+5+7=16$



Łączne oszac. dolne: $6+16=22$.

Ale można lepiej usuwając c zamiast a.

Wtedy: $w(P_3) \geq 7+8=15$

$w(P_{n-1}) \geq 2+4+5=11$ $\Rightarrow 11+15 \geq \underline{\underline{26}}$