W7. Podstawowe pojęcia teorii grafów.

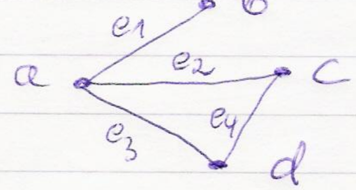
Grafem nazywamy parę zbiorów $G=(V,E)$, gdzie $|V|<\infty$, $E \subseteq \binom{V}{2}$ (tutaj $\binom{V}{2}$ jest zbiorem wszystkich 2-elementowych podzbiorów zbioru V).

V - zbiór wierzchołków, E - zbiór krawędzi

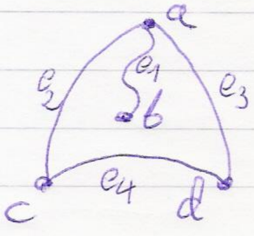
Jeśli $e=\{u,v\}\in E$ i $f=\{v,w\}\in E$, to mówimy, że u i e są *incydentne*, u i v są *przyległe (sąsiednie)*, e i f są *przyległe*.

Prz 1. $G_1=\left(\{a,b,c,d\},\{\overset{e_1}{ab}, \overset{e_2}{ac}, \overset{e_3}{ad}, \overset{e_4}{cd}\}\right)$

(tutaj stosujemy skrótową notację $uv:=\{u,v\}$).



lub



lub ...

Sąsiedztwem wierzchołka v nazywamy zbiór wszystkich jego sąsiadów. Formalnie,

$$N_G(v)=\{u : uv\in E\}$$

Stopniem wierzchołka v nazywamy liczbę jego sąsiadów, czyli $d_G(v) = |N_G(v)|$.

<u>TW1</u>. $\forall G: \sum_{v \in V} d_G(v) = 2|E|$

<u>d</u>: suma po lewej liczy każdą krawędź 2 razy □

<u>WN1</u>. $\forall G$: liczba wierzchołków o stopniu nieparzystym jest parzysta

<u>d</u>: z TW1 wynika, że suma stopni jest parzysta. □

<u>Specjalne klasy grafów</u>

1) Grafy pełne: $E = \binom{V}{2}$; oznaczenie K_n, gdzie $n = |V|$.
2) Grafy puste: $E = \emptyset$
3) Ścieżki: $V = \{\underbrace{v_1, \dots, v_n}_{\text{końce}}\}$, $E = \{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n\}$ ozn P_n
4) Cykle $(n \geq 3)$: $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, $E = \{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n, v_nv_1\}$ ozn. C_n
5) Kostki: $V = B_n$, $E = \{\underline{a}\,\underline{b} : \sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i| = 1\}$
(odległość Hamminga $= 1$) ozn. Q_n
6) Gwiazdy: $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, $E = \{v_1v_2, v_1v_3, \dots, v_1v_n\}$
ozn. S_n lub $K_{1,n}$

7) Grafy dwudzielne: $\exists$ podział $V = X \cup Y$, $X, Y \neq \emptyset$:

$\forall e \in E: \ e \cap X \neq \emptyset \ \wedge \ e \cap Y \neq \emptyset$.

7a) Grafy pełne dwudzielne: $\exists$ podział jak wyżej plus $|E| = |X| \cdot |Y|$ (ozn $K_{n,m}$, $|X| = n$, $|Y| = m$)

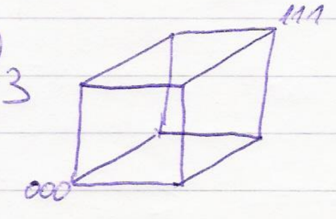
8) Grafy planarne: <u>można</u> je narysować na płaszczyźnie bez zbędnych przecięć.

<u>Prz 2</u> Ilustracje klas 1) – 8)

1) K_1 •, K_2, K_3, K_4 ; 2)

3) P_1 •, P_2, P_3 ; 4) C_3, C_4.

5) Q_1 0 1, Q_2 10 11 00 01, Q_3

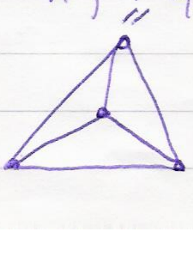


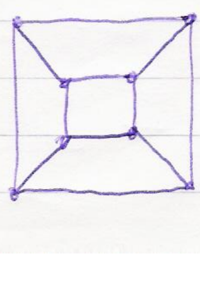
6) S_1, S_2, S_3, S_4

7) Wszystkie P_n, S_n, Q_n, oraz C_n dla parz. n

7a) $K_{1,1}$, $K_{1,2}$, $K_{2,2}$, $K_{3,3}$

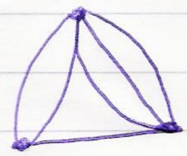
8) Wszystkie P_n, S_n, C_n, K_4, Q_3 =



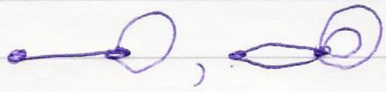


Inne typy grafów

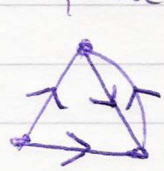
- multigrafy: E jest multizbiorem, tzn. krawędzie występują z krotnościami



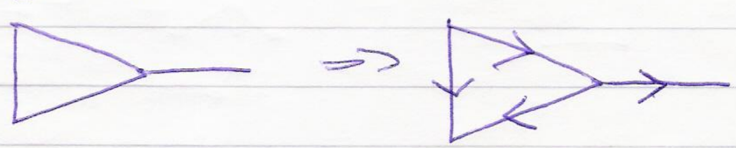
- pseudografy: $E \subseteq \binom{V}{2} \cup \binom{V}{1}$
  E – multizbiór



- grafy skierowane: $E \subseteq V \times V$, tzn. krawędzie są parami uporządkowanymi (łukami)

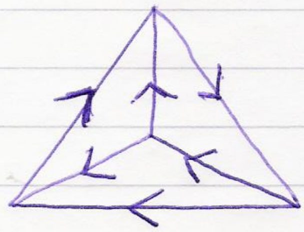


- orientacje: grafy skierowane powstałe z grafów nieskierowanych przez nadanie kierunku każdej krawędzi



lub ...

- turnieje: orientacje grafów pełnych



- grafy (i gr. skierowane) ważone:
  $w: E \to \mathbb{R}$ – wagi na krawędziach

W grafach skierowanych występują półstopnie wejścia $d^-(v) = \{u : (u,v) \in E\}$ i wyjścia $d^+(v) = \{u : (v,u) \in E\}$

Analog TW1: $\sum_v d^-(v) = \sum_v d^+(v)$

Komputerowa reprezentacja grafu

- Macierz incydencji $M_G = (m_{ve})$; $m_{ve} = 1$, gdy v i e są incydentne, $m_{ve} = 0$ w przeciwnym razie.
- Macierz przyległości (sąsiedztwa) $A_G = a_{uv}$; $a_{uv} = 1$, gdy u i v są przyległe, $a_{uv} = 0$ w przeciwnym razie.
- Listy sąsiedztw: $(N_G(v) : v \in V)$

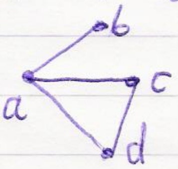
Prz 1 (c.d.)

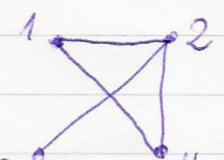
$$M_G = \begin{array}{c|cccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \hline a & 1 & 1 & 1 & 0 \\ b & 1 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 1 & 0 & 1 \\ d & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}, \quad A_G = \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 1 & 1 & 1 \\ b & 1 & 0 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 & 0 & 1 \\ d & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}, \quad \begin{array}{l} N_G(a) = bcd \\ N_G(b) = a \\ N_G(c) = ad \\ N_G(d) = ac \end{array}$$

Izomorfizm grafów G_1 i G_2 są izomorficzne (zapis $G_1 \cong G_2$), gdy $\exists$ bijekcja $f : V_1 \to V_2$ taka, że

$\forall u, v \in V_1 : uv \in E_1 \iff f(u)f(v) \in E_2$.

Prz 3 G_1 – jak w Prz 1, $G_2 = (\{1,2,3,4\}, \{12, 23, 24, 14\})$

G_1: 

G_2: 

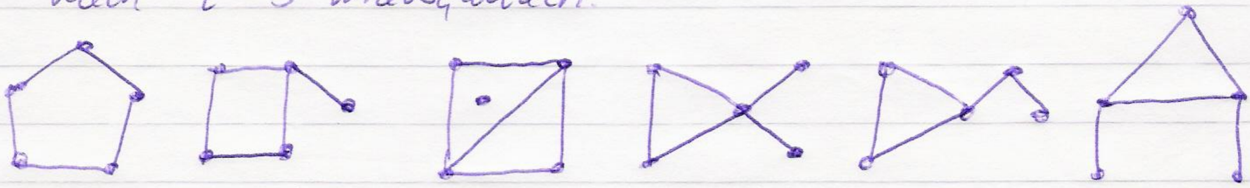
$f(a) = 2,\ f(b) = 3,\ f(c) = 1,\ f(d) = 4$

lub odwrotnie

Izomorfizm grafów jest relacją równoważności (jest zwrotna, symetryczna i przechodnia)

Jej klasy abstrakcji – <u>grafy nieoznaczone</u> (dla odróżnienia, zwykłe grafy nazywa się czasem oznaczonymi)

<u>Pr4</u> Narysować wszystkie grafy nieoznaczone o 5 wierzchołkach i 5 krawędziach



3,2,2,2,1   3,2,2,2,1

<u>Uwaga</u> Izomorfizm zachowuje ciągi stopni, ale z równości ciągów stopni nie wynika izomorfizm (patrz Pr 4)

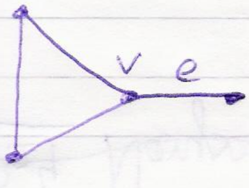
<u>Dopełnienie</u> grafu G to $G^c = (V, \binom{V}{2} - E)$.

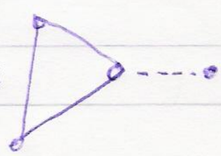
Jeśli $G \cong G^c$, to G jest <u>samodopełniający</u>.

<u>Podgrafy</u>
- poprzez usuwanie wierzchołków
- " " krawędzi
- " kombinację powyższych operacji

$v \in V$, $G - v = (V \setminus \{v\}, E \setminus \{e \in E : e \ni v\})$

$e \in E$, $G - e = (V, E \setminus \{e\})$

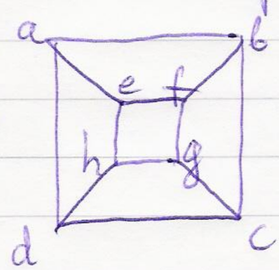


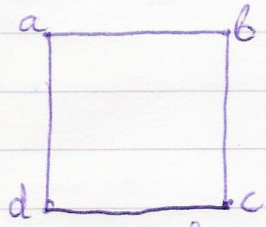
$G - v =$  , $G - e =$ 

Podgrafy indukowane – tylko usuwanie wierzch.

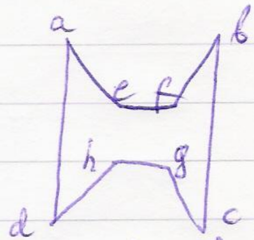
– " – rozpięte – " " krawędzi

Pr5

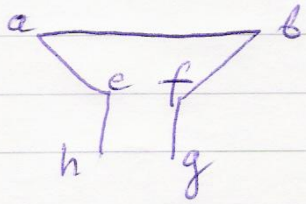




podgraf indukowany przez $\{a,b,c,d\}$



podgraf rozpięty

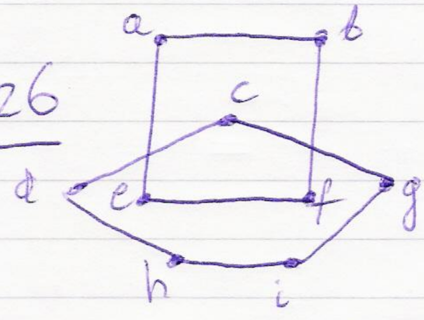


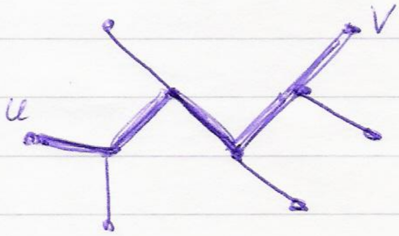
podgraf ani taki ani siaki

Spójność G jest spójny, gdy nie istnieje podział

$V=V_1\cup V_2$: $E\subseteq\binom{V_1}{2}\cup\binom{V_2}{2}$, tzn., że $E(V_1,V_2)=\emptyset$

Pr6





niespójny: $V_1=\{a,b,e,f\}$, $V_2=\{c,d,g,h,i\}$

spójny

Równoważna def. G jest spójny, gdy $\forall u,v\in V$, $u\neq v$: istnieje w G ścieżka o końcach w u i v. Jest to relacja równoważności, a jej klasy abstrakcji to składowe spójności grafu G.

<u>Równoważna def. składowej spójności</u>: to maksymalny (w sensie zawierania) podgraf spójny.

<u>TW2</u> Jeśli graf ma

(a) co najmniej $|V|$ krawędzi, to zawiera cykl.

(b) co najwyżej $|V|-2$ krawędzi, to <u>nie</u> jest spójny.

<u>dowód</u> Niech $n=|V|$

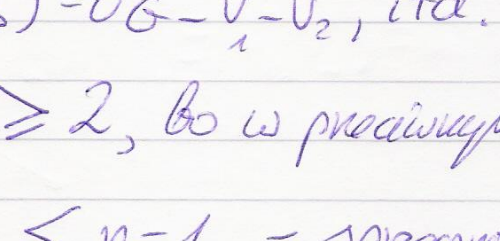
(a) Niech $d_G(v_1)=\delta_G$ – minimalny stopień,

$d_{G-v_1}(v_2)=\delta_{G-v_1}$, $d_{G-v_1-v_2}(v_3)=\delta_{G-v_1-v_2}$, itd.

Musi istnieć i: $\delta_{G-v_1-\ldots-v_i}\geq 2$, bo w przeciwnym razie byłoby $|E|\leq \underbrace{1+1+\ldots+1}_{n-1 \text{ razy}} \leq n-1$ – sprzeczność.

Niech $H=G-v_1-\ldots-v_i$. Mamy $\delta(H)\geq 2$.

Rozważmy najdłuższą ścieżkę w H i jeden z jej końców. Oprócz poprzednika na ścieżce ma on przynajmniej jeszcze jednego sąsiada – też na ścieżce, stąd cykl.



(b) Rozpatrujemy po kolei podziały $(V_1=\{v_1\}, V_2=V-V_1)$, $(V_1=\{v_1,v_2\}, V_2=V-V_1)$, itd. Jeden z nich spełnia $E(V_1,V_2)=\emptyset$ $\square$

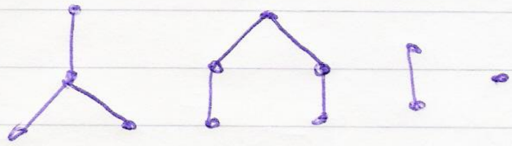
<u>WN2</u> Każdy maksymalny graf bez cykli, jak również każdy minimalny graf spójny ma dokładnie $|V|-1$ krawędzi.

<u>DRZEWA</u> *Drzewo* to graf spójny bez cykli

Las to graf acykliczny (= bez cykli).

Zatem drzewo to spójny las.

Każda składowa spójności lasu jest drzewem.



← las o 4 składowych

Krawędź e spójnego grafu G naz. *mostem* (lub krawędzią cięcia), gdy $G-e$ nie jest spójny.

Krawędź e dowolnego grafu G jest <u>mostem</u>, gdy jest mostem jego składowej spójności.

<u>TW3</u> Krawędź e jest mostem wgdy nie leży na cyklu.

<u>dowód</u> $\overset{=uv}{e}$ jest mostem $\Leftrightarrow$ $G-e$ niespójny

$\Leftrightarrow \exists\, V=V_1\cup V_2,\ u\in V_1,\ v\in V_2,\ E_{G-e}(V_1,V_2)=\emptyset \Leftrightarrow$

nie ma ścieżki z u do v w $G-e$ $\Leftrightarrow$ $e=uv$ nie leży

na cyklu w G □

<u>WN3</u> Każda krawędź drzewa jest mostem □

<u>WN4</u> Każdy spójny graf zawiera rozpięte drzewo.

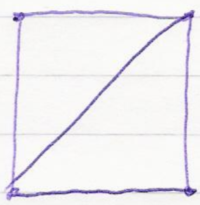
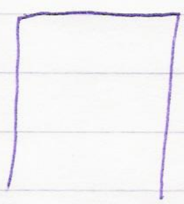
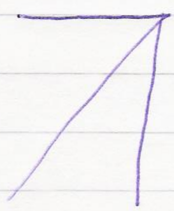
<u>d</u>: poniższy algorytm znajduje rozpięte drzewo w spójnym grafie

<u>WE</u>: $G=(V,E)$, spójny

(1) $F:=E$
(2) Jeśli $\exists\, e\in F$: e nie jest mostem w $T=(V,F)$, to $F:=F\setminus\{e\}$ i idź do (2)

<u>WY</u>: $T=(V,F)$ − rozpięte drzewo w G. □

<u>Prz7</u>

G:  T_1:  T_2: 

2 nieoznaczone rozpięte drzewa
dużo więcej oznaczonych $(6+2)$