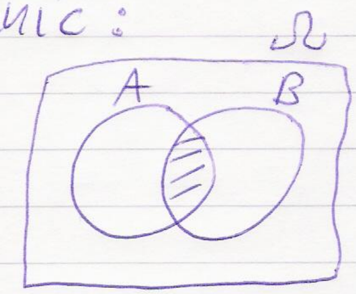
W5. Zasada włączania i wyłączania

Prawo dodawania można uogólnić:

Dla dowolnych $A, B \subseteq \Omega$:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



Prz1 Ile liczb naturalnych nie większych od 600 jest podzielnych przez 3 lub 5?

R: $A = \{x \in \mathbb{N} : x \leq 600,\ 3|x\}$, $|A| = \frac{600}{3} = 200$

$B = \{x \in \mathbb{N} : x \leq 600,\ 5|x\}$, $|B| = \frac{600}{5} = 120$

$A \cap B = \{x \in \mathbb{N} : x \leq 600,\ 3|x,\ 5|x\} = \{x \in \mathbb{N} : x \leq 600,\ 15|x\}$

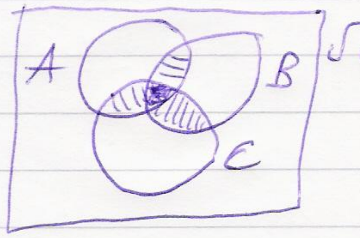
$|A \cap B| = \frac{600}{15} = 40 \Rightarrow |A \cup B| = 200 + 120 - 40 = 280$ $\square$

Prz2 Spośród 100 studentów, 50 uczy się francuskiego, 40 hiszpańskiego, a 20 – obu tych języków. Ilu z nich nie uczy się ani francuskiego, ani hiszpańskiego?

R: $|F^c \cap H^c| = |(F \cup H)^c| = 100 - |F \cup H| = 100 - (50 + 40 - 20) = 30$

$\square$

Dla 3 zbiorów: $A, B, C \subseteq \Omega$



$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Pr 3 Na ile sposobów można rozdać 5 różnych zabawek trójce dzieci tak, aby żadne dziecko nie pozostało bez zabawki?

R: X - zb. zabawek, Y - zb. dzieci, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$

rozdanie to funkcja $f: X \to Y$, $|\{f: X \to Y\}| = 3^5$;

pytamy o surjekcje; dla $i = 1, 2, 3$:

$A_i = \{f: X \to Y : y_i \notin f(X)\}$ — i-te dziecko bez zabawki

$$|A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c| = 3^5 - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 3^5 - 3 \cdot 2^5 + 3 - 0 = 150,$$

bo $|A_i| = 2^5$, $|A_i \cap A_j| = 1$, $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$. □

Dla 4 zbiorów: $A, B, C, D \subseteq \Omega$

$$|A \cup B \cup C \cup D| = |A| + |B| + |C| + |D| - |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D|$$
$$- |B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D| + |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |B \cap C \cap D| + |A \cap C \cap D|$$
$$- |A \cap B \cap C \cap D|.$$

Prz 4 Ile jest liczb złożonych nie większych od 111?

R: $\{2 \le x \le 111 : 2|x \text{ lub } 3|x \text{ lub } 5|x \text{ lub } 7|x\} = A_2 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7 - \{2,3,5,7\}$

$$|A_2 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7| = \left\lfloor \frac{111}{2} \right\rfloor + \frac{111}{3} + \left\lfloor \frac{111}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{111}{7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{111}{6} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{111}{10} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{111}{14} \right\rfloor -$$

$$- \left\lfloor \frac{111}{15} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{111}{21} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{111}{35} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{111}{30} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{111}{42} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{111}{70} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{111}{105} \right\rfloor - 0 =$$

$$= 55 + 37 + 22 + 15 - 18 - 11 - 7 - 7 - 5 - 3 + 3 + 2 + 1 + 1 - 0 = 85$$

Liczb złożonych jest zatem $85 - 4 = 81$,

a pierwszych $110 - 81 = 29$ (nie liczymy 1) $\square$

Czas na uogólnienie:

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \ldots - |A_{n-1} \cap A_n|$$
$$+ \ldots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \ldots \cap A_n|,$$

$$|A_1^c \cap \ldots \cap A_n^c| = |\Omega| - |A_1| - \ldots - |A_n| + |A_1 \cap A_2| + \ldots (-1)^n |A_1 \cap \ldots \cap A_n|$$

Bardziej kompaktowo:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\substack{I \subseteq [n], \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{I \subseteq [n] \\ |I| = i}} (-1)^{i-1} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|$$

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c\right| = |\Omega| + \sum_{\substack{I \subseteq [n] \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right| = |\Omega| + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \sum_{\substack{I \subseteq [n], \\ |I| = i}} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|$$

Pr 5 Roztargniona sekretarka wkłada 5 listów do 5 zaadresowanych kopert w sposób losowy.

a) Obl. prawdop, że żaden list nie trafi do adresata.

Ω - wszystkie permutacje 5 listów $l_1, l_2, \dots, l_5$.

$|\Omega| = 5!$, A_i - permutacje, w których list l_i jest na i-tym miejscu, $|A_i| = 4!$, $|A_i \cap A_j| = 3!$, $|A_i \cap A_j \cap A_k| = 2!$

$|A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_h| = |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| = 1$

Odp: $5! - 5 \cdot 4! + \binom{5}{2} \cdot 3! - \binom{5}{3} \cdot 2! + 5 \cdot 1 - 1 =$

$= 120 - 120 + 60 - 20 + 4 = 44 \quad / : 5! = 120 \quad = \frac{11}{30}$

b) Obl. prawdop, że dokładnie 1 list trafi do adresata.

$= 5 \cdot \left[4! - 4 \cdot 3! + \binom{4}{2} \cdot 2! - 4 \cdot 1 + 1\right] \frac{1}{5!} = \frac{1}{24}(12 - 3) = \frac{3}{8}$

NA ĆWICZENIACH:

- uogólnić na n listów (m trafi, $m \geq 0$)
- $n \to ?$ (zbadać asymptotykę)