W4. Schematy wyboru i tożsamości kombinatoryczne

I. Schematy wyboru

Wybieramy k elementów ze zbioru
$Y = \{y_1, \dots, y_n\}$.

Ile jest możliwości?

To zależy od schematu wyboru:

2 pytania:

1. Czy istotna jest kolejność (porządek)?
2. Czy elementy mogą się powtarzać?

4 schematy losowania:

1-TAK, 2-TAK Wariacje (z powt.) n^k

1-TAK, 2-NIE Wariacje bez powt. $(n)_k$

1-NIE, 2-NIE Kombinacje (bez powt.) $\binom{n}{k}$

1-NIE, 2-TAK Kombinacje z powt. $\binom{n+k-1}{k}$

Pr 1 Ile jest ciągów ternarnych długości k ?

R: $Y=\{0,1,2\}$, $n=3$ 3^k

Pr 2 Winda obsługująca 10-piętrowy dom wyrusza z parteru z 7 przypadkowych pasażerów. Obl. prawdopodobieństwo, że każdy wysiądzie na innym piętrze.

R: $$P=\frac{(10)_7}{10^7}=\frac{10!}{3!\,10^7}=\frac{4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9}{10^6}$$

Gdy $k=n$, to wariacje bez powt = permutacje
Zatem permutacji rzędu n jest $n!$,
bo $(n)_k=\frac{n!}{(n-k)!}=\frac{n!}{0!}=n!$

Pr 3 W ilu ciągach złożonych z 10 różnych cyfr, cyfry 1 i 2 stoją obok siebie?

R: $0,\boxed{12},3,\dots,9$ – $9!\times2$ (bo również $\boxed{21}$).

Wariacje z i bez powt. to <u>ciągi</u> (wektory) zbudowane z elementów zb. Y.
Kombinacje (bez powtórzeń) to <u>zbiory</u>.

<u>TW</u> 1 Wszystkich k-elem. kombinacji ze zbioru Y mocy n jest tyle co k-elem. podzbiorów zb. Y, czyli $\binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!} =$
$= \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

<u>D</u>: Stosujemy uog. zas. bijekcji (patrz Pr5 z W3)

A - zb. wsz. k-el. wariacji bez powt. z Y

B - zb. wsz k-el. kombinacji z Y.

$f((y_1, \dots, y_k)) = \{y_1, \dots, y_k\}$

Wtedy $|f^{-1}(\{y_1, \dots, y_k\})| = k!$ (liczba permutacji)

i $|A| = k!\,|B| \Rightarrow |B| = \frac{|A|}{k!} = \frac{(n)_k}{k!}$ $\square$

Pr4. Ile jest ciągów binarnych złożonych z z zer i j jedynek?

R: $Y = \{1, 2, \ldots, z+j\}$.

Ciąg binarny jest jednoznacznie określony przez wskazanie podzbioru Y mocy z, który wskaże, gdzie znajdą się zera. Zatem

$$\binom{z+j}{z} \quad \left(= \binom{z+j}{j} \right) \qquad \square$$

Czym są kombinacje z powtórzeniami?

Nie ciągi, nie zbiory.

Np. 3-el. komb. z powt. ze zbioru $Y = \{a, b, c\}$, to

aaa, aab, abc, aac, abb, acc, bcc, bbc, bbb, ccc

Multizbiory = zbiory z krotnościami, np. $\{b^1, c^2\}$

Formalnie, komb. z powt. to rozwiązania równania

$$x_1 + \ldots + x_n = k, \quad x_i \in \mathbb{N}_0$$

Z Pr. 4, W3 i Pr 4, W4, ich liczba wynosi $\binom{n+k-1}{k}$

Prz 5 Ile jest kostek domino?

$n=7 \quad k=2 \quad \binom{7+2-1}{2} = \binom{8}{2} = \frac{8\cdot 7}{2} = 28$

II. Podziały zbiorów i permutacje z powtórzeniami

TW2 Liczba (uporządkowanych) podziałów $(A_1, \dots, A_r)$ zbioru Y mocy n, gdzie $|A_i| = t_i \geq 0$, $i = 1, \dots, r$, $\sum_{i=1}^{n} t_i = n$, wynosi $\frac{n!}{t_1! \dots t_r!}$.

Def. $(A_1, \dots, A_r)$ jest podziałem A, gdy zbiory $A_1, \dots, A_r$ są parami rozłączne i $\bigcup_{i=1}^{r} A_i = A$.

Dowód TW2 Jest $\binom{n}{t_1}$ wyborów A_1, następnie $\binom{n-t_1}{t_2}$ wyborów A_2, itd. Łącznie

$$\binom{n}{t_1}\binom{n-t_1}{t_2}\binom{n-t_1-t_2}{t_3} \dots \binom{n-t_1-t_2-\dots-t_{r-1}}{t_r} = \frac{n!}{t_1! \dots t_r!}$$

$\square$

Pr6 Do restauracji, w której wolne są 3 stoliki 2-osobowe, 2 stoliki 4-osobowe, 2 stoły 6-osob. i 1 8-osobowy, wchodzi grupa 34-osobowa. Na ile sposobów można ich podzielić na grupy zasiadające przy poszczególnych stołach?

R: $n=34$, $t_1=t_2=t_3=2$, $t_4=t_5=4$, $t_6=t_7=6$, $t_8=8$

$$\frac{34!}{2!^3\,4!^2\,6!^2\,8!}=?$$

Pr7 ~~...~~ Liga piłkarska składa się z 16 zespołów. Na ile sposobów można ułożyć 1. kolejkę rozgrywek?

R: Dzielimy 16 zespołów na 8 par (nieuporządkowanych)

$\frac{16!}{2^8\cdot 8!}$ i mnożymy przez 2^8 (wybór gospodarza)

Odp: $\frac{16!}{8!}=(16)_8$ (Dzielimy przez 8!, żeby zignorować porządek par)

Inne rozwiązanie?

Pr8 Ile 10-literowych słów można ułożyć ze słowa MATEMATYKA?

R: Y - zb. 10 (pustych) miejsc na litery

$$\underline{\ \ }\ \underline{\ \ }\ \underline{\ \ }\ \underline{\ \ }\ \underline{\ \ }\ \underline{\ \ }\ \underline{\ \ }\ \underline{\ \ }\ \underline{\ \ }\ \underline{\ \ }$$
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Mamy $2\times M$, $3\times A$, $2\times T$, E, Y, K

Dzielimy Y na ~~A~~ $Y_A, Y_M, Y_T, Y_E, Y_Y, Y_K$

o mocach $3, 2, 2, 1, 1, 1$.

Odp: $\dfrac{10!}{3!\,2!^2\,1!^3} = \dfrac{10!}{24} = 2\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 9\cdot 10$

TW3 Wszystkich permutacji n-elem. multizbioru

$M = \{y_1^{t_1}, \dots, y_r^{t_r}\}$, $\Sigma t_i = n$, $t_i \geqslant 1$, jest

$$\frac{n!}{t_1! \cdots t_r!},$$

a więc tyle samo co podziałów z TW2.

III. Tożsamości kombinatoryczne

(a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ d: bijekcja między podzbiorami a ich dopełnieniami

(b) $\binom{n}{k+1} = \binom{n-1}{k+1} + \binom{n-1}{k}$

d: wszystkie podzbiory mocy $k+1$ zbioru $Y=\{y_1,\dots,y_n\}$ dzielimy na te, które nie zawierają y_n i te, które zaw.

Trójkąt Pascala

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & & & & \dots & & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
\binom{n-1}{k} & & \binom{n-1}{k+1} \\
 & \searrow + \swarrow & \\
 & \binom{n}{k+1} &
\end{array}
$$

(c) $\sum_{i=0}^{k} \binom{n+i}{i} = \binom{n+k+1}{k}$

d: $\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \dots + \binom{n+k}{k} =$

$\overset{(b)}{=} \binom{n+2}{1} + \binom{n+2}{2} + \dots + \binom{n+k}{k} =$

$\overset{(b)}{=} \binom{n+3}{2} + \dots + \binom{n+k}{k} = \dots$

$\dots \overset{(b)}{=} \binom{n+k}{k-1} + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k}$

Bardziej formalnie, indukcja wzgl. k (n ustalone)

(d) $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$ <u>d</u>: z definicji $\binom{n}{k}$

<u>Pr 9</u> Na okręgu umieszczono 10 punktów. Ile ~~wiel~~ wypukłych wielokątów ma wszystkie wierzchołki wśród tych punktów?

<u>R</u>: dowolny podzbiór od 3 do 10 punktów wyznacza wielokąt wypukły.

$$\binom{10}{3}+\binom{10}{4}+\ldots+\binom{10}{10}=2^{10}-\binom{10}{0}-\binom{10}{1}-\binom{10}{2}=$$

$$=2^{10}-1-10-45=1024-56=968.$$

<u>TW 4</u>. Wzór Newtona (dwumianowy) $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$

<u>d</u>: $(a+b)^n=\underbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)}_{n}$

Mnożąc każdy z każdym, wyraz $a^k b^{n-k}$ powstanie tyle razy, na ile sposobów można wybrać k spośród n par nawiasów, czyli $\binom{n}{k}$ $\square$

Pr 10 Ud, że ~~jeśli~~

$$\sum_{k\text{-parz}} \binom{n}{k} = \sum_{k\text{-niepar}} \binom{n}{k}$$

d: Stosujemy wzór Newtona z $a=-1$, $b=1$

$$0=(-1+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k=\left(\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\dots\right)-\left(\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\dots\right)$$

$\square$

Def $\binom{n}{k}$ - współczynniki dwumianowe (Newtona)

Gdy $t_1+\dots+t_r=n$, to $\binom{n}{t_1,\dots,t_r}:=\dfrac{n!}{t_1!\cdots t_r!}$

- uogóln. współcz. dwumianowe.

TW5 Uogóln. wzór Newtona (wielomianowy)

$$(x_1+\dots+x_r)^n=\sum_{\substack{t_1=0 \\ t_1+\dots+t_r=n}}^{n}\cdots\sum_{t_r=0}^{n}\binom{n}{t_1,\dots,t_r}x_1^{t_1}\cdots x_r^{t_r}$$

Uwaga $\binom{n}{t_1,t_2}=\binom{n}{t_1}$, $t_1+t_2=n$ $(r=2)$