W3. Podstawowe prawa przeliczania

I. Zasada bijekcji

Funkcja $f: A \to B$ jest iniekcją, gdy jest różnowartościowa, tzn. $\forall a_1, a_2 \in A$:

$$a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$$

Piszemy wtedy $f: A \xrightarrow{1-1} B$.

Funkcja $f: A \to B$ jest surjekcją (suriekcją), gdy jest „na", tzn. $\forall b \in B \; \exists a \in A : f(a) = b$.

Piszemy wtedy $f: A \xrightarrow[na]{} B$.

Funkcja, która jest iniekcją i suriekcją, jest bijekcją. Zapis $f: A \xrightarrow[na]{1-1} B$.

Załóżmy, że $|A| < \infty$, $|B| < \infty$.

Jeśli $f: A \xrightarrow{1-1} B$, to $|A| \leq |B|$. (Zasada iniekcji)

Jeśli $f: A \xrightarrow[na]{} B$, to $|A| \geq |B|$.

Zatem...

<u>Zasada bijekcji</u>. Jeśli $f: A \to B$ jest bijekcją, to $|A| = |B|$

<u>Uwaga</u> Zas. iniekcji jest równoważna zasadzie szufladkowej, bo jej transpozycja mówi:

$|A| > |B| \Rightarrow \exists\, a_1 \neq a_2,\ a_1, a_2 \in A : f(a_1) = f(a_2)$

(tutaj A – gołębie, B – gołębniki, f przypisuje gołębniki do gołębi).

<u>Prz1</u>. Ciąg binarny długości n, to ciąg $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, $a_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, \dots, n$.

Pokazać, że wszystkich podzbiorów zbioru X mocy n jest tyle, co wszystkich ciągów binarnych dł. n.

R: Niech $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, $Y \subseteq X$,

$$f(Y) = (a_1, \dots, a_n),\quad a_i = \begin{cases} 1 & x_i \in Y \\ 0 & x_i \notin Y \end{cases},\ i = 1, \dots, n$$

Łatwo sprawdzić, że $f: 2^X \to \mathcal{B}_n$, gdzie $2^X = \{Y : Y \subseteq X\}$, $\mathcal{B}_n$ – zbiór wszystkich ciągów binarnych dł. n. $\square$

Prz2. W turnieju (szachowym, tenisowym, etc.) rozgrywanym systemem pucharowym (tzn. przegrywający odpada, nie ma remisów) bierze udział n zawodników. Niezależnie od systemu rozgrywek, ile będzie meczów w całym turnieju?

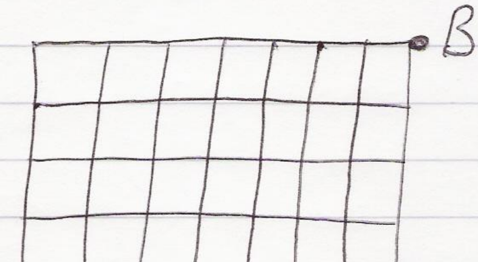
R: A – zbiór rozegranych meczów

B – zbiór przegranych zawodników

$f: A \to B$, $f(a)$ – zawodnik, który przegrał mecz a.

f jest bijekcją, zatem $|A| = |B| = n-1$. □

Prz3. Na planie ulic obok, ile jest najkrótszych dróg z A do B? Tyle, ile ciągów



binarnych dł. 11 złożonych z 4 „1” i 7 „0”.

Bijekcja opiera się na kodowaniu każdego odcinka pionowego | przez 1, a poziomego przez 0. □

Prz 4. Pok., że rozwiązań równania

$$x_1 + \ldots + x_n = k$$

spełniających warunek $x_i \in \mathbb{N}_0$, $i = 1, \ldots, n$, jest tyle, co ciągów binarnych złożonych z k „0" i $n-1$ „1".

R: A – zb. rozwiązań, $B = \mathcal{B}_{k, n-1}$ – zb. ciągów ...

$a = (x_1, \ldots, x_n) \in A$ zapiszmy graficznie

$$b = (\underbrace{0 \cdots 0}_{x_1}, 1, \underbrace{0 \cdots 0}_{x_2}, 1, \ldots 1, \underbrace{0 \cdots 0}_{x_n})$$

$f(a) = b$ jest bijekcją z A do B. □

Ogólna zasada bijekcji. Jeśli $k \in \mathbb{N}$ i $f: A \to B$ są takie, że $\forall b \in B: |f^{-1}(b)| = k$ oraz zbiory $f^{-1}(b)$, $b \in B$, są parami rozłączne, to

$$|A| = k|B|$$

Dowód:

□

Prz 5 X - skończony zbiór, $|X| \geq 3$.

A - zb. wszystkich ciągów (a,b,c), $a,b,c \in X$ $a\neq b, a\neq c, b\neq c$

B - zb. wsz. 3-el. podzbiorów zbioru X.

Ile razy A jest większy od B?

R: $f: A \to B$, $f((a,b,c)) = \{a,b,c\}$.

$\forall S \in B: |f^{-1}(S)| = 3!$ oraz

$f^{-1}(S)$, $S \in B$, są parami rozłączne.

Zatem odp: $3! = 6$ $\square$

II. Prawo mnożenia

Niech $A_1, \dots, A_n$ będą skończonymi zbiorami.

Wtedy $|A_1 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdots |A_n|$, gdzie

$A_1 \times \dots \times A_n = \{(a_1, \dots, a_n) : a_i \in A_i, i = 1, \dots, n\}$

Ogólniej, jeśli procedura składa się z n kolejnych kroków, a po wykonaniu kroków $1, 2, \dots, i-1$, krok i-ty można wykonać na ~~...~~ s_i sposobów, $i = 1, \dots, n$, to procedurę tę można wykonać na $s_1 \cdot \ldots \cdot s_n$ sposobów.

18

Pr6 a) Ile jest ciągów binarnych dług. n?

b) Ile jest funkcji boolowskich n zmiennych?

c) Ile z nich jest „self-dual"?

R: a) $|\mathbb{B}_n| = |B|^n = 2^n$

b) $f: \mathbb{B}_n \to B \qquad |B|^{|\mathbb{B}_n|} = 2^{2^n}$

c) Jest 2^{n-1} par ciągów dualnych wzgl. siebie

np. $0110 \Leftrightarrow 1001$.

Odp: $|B|^{2^{n-1}} = 2^{2^{n-1}} = \sqrt{2^{2^n}}$ $\square$

Pr7 Ile wynosi $|A|$, $|B|$, gdzie A i B są jak w Pr5? Przyjmijmy $|X|=n$.

R: $|A| = n(n-1)(n-2) = (n)_3$

$$|B| = \frac{1}{3!}\, n(n-1)(n-2) = \frac{(n)_3}{3!}$$

Pr8. Ile 3-cyfrowych liczb ma 3 różne cyfry, w tym 0?

pozycja dla 0

R1: $9 \cdot 2 \cdot 8 = 144$

R2: $9 \cdot 9 \cdot 8 - 9 \cdot 8 \cdot 7 = 9 \cdot 8 \cdot (9-7) = 144$ $\square$

III. Prawo dodawania

Jeśli $A_1, A_2, \ldots, A_n$ są skończone i parami rozłączne, to, $\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$

Prz 9 Hasło do systemu komputerowego musi mieć od 6 do 8 małych liter lub cyfr, przy czym musi występować co najmniej 1 cyfra. Ile jest możliwych haseł?

R: $H = H_6 \cup H_7 \cup H_8$, H_i - zb. haseł dług. i.

$|H| = |H_6| + |H_7| + |H_8|$

$|H_6| = 36^6 - 26^6$, $|H_7| = 36^7 - 26^7$, $|H_8| = 36^8 - 26^8$.

$\Rightarrow |H| = 2.684.483.063.360$ $\square$

Prz 10. Rzucamy 2 razy kostką do gry. Obl. prawd., że suma oczek ≤ 7.

R: $P = \frac{|A|}{|\Omega|}$, $|\Omega| = 6^2 = 36$, $A = \bigcup_{i=1}^{6} A_i$,

$A_i = \{(x,y) : x = i,\ x+y \leq 7,\ 1 \leq y \leq 6\}$, $i = 1, \ldots, 6$.

$|A| = \sum |A_i| = 6+5+4+3+2+1 = 21 \Rightarrow P = \frac{21}{36}$ $\square$