W 2

Indukcja matematyczna

$p(n)$ – ciąg zdań indeksowanych liczbami naturalnymi $\mathbb{N}=\{1,2,\dots\}$ lub $\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$.

Zasada indukcji matematycznej

Niech $n_0 \in \mathbb{N}_0$. Jeśli

(a) $p(n_0)$ jest prawdziwe

(b) $\forall k \geq n_0$: prawdziwa jest implikacja

$$p(k) \Rightarrow p(k+1),$$

to $p(n)$ jest prawdziwe dla wszystkich $n \geq n_0$.

Prz 16 Znaleźć wzór na sumę

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!} = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{(i+1)!} = ?$$

Oznaczmy tę sumę przez S_n.

Mamy $S_1 = \frac{1}{2!}$, $S_2 = \frac{5}{3!}$, $S_3 = \frac{23}{4!}$, ...

Hipoteza: $\forall_n \; S_n = \frac{(n+1)!-1}{(n+1)!}$ — zdanie $p(n)$.

$p(1)$ jest prawdą; niech $k \geq 1$, załóżmy, że $p(k)$ jest prawdą, tzn. $S_k = \frac{(k+1)!-1}{(k+1)!}$. Wtedy

$$S_{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1} \frac{i}{(i+1)!} = S_k + \frac{k+1}{(k+2)!} \stackrel{z.i.}{=} \frac{(k+1)!-1}{(k+1)!} + \frac{k+1}{(k+2)!} =$$

$$= \frac{(k+2)!-(k+2)+(k+1)}{(k+2)!} = \frac{(k+2)!-1}{(k+2)!}$$ – $p(k+1)$ prawdziwe. □

Pr 17 Nierówność Bernoulliego

$\forall n \geq 0,\ n \in \mathbb{N}_0,\ \forall x > -1,\ x \in \mathbb{R}$:

$(1+x)^n \geq 1 + nx$ – zdanie $p(n)$

$p(0)$: $1 \geq 1$ – prawda

Załóżmy, że $p(n)$ – prawda, $n \in \mathbb{N}_0$.

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \stackrel{z.i.}{\geq} (1+nx)(1+x) =$$

$$= 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x,$$

a więc $p(n+1)$ jest prawdziwe □

Pr 18 Hipoteza: $\forall n \in \mathbb{N}_0\ \exists k \in \mathbb{N}_0\ \exists$ l. pierwsza q:

$2n+1 = q + 2^k$ – zdanie $p(n)$

Obalić tę hipotezę! (w domu, z komputerem)

Pr 19 Udowodnić, że jeśli wśród $2n$ osób jest więcej niż n^2 par znajomych, $n \geq 2$, to są wśród nich trzy osoby znające się nawzajem.

Dowód $p(n)$ – powyższe zdanie, $n_0 = 2$

$p(n_0)$: 4 osoby, co najmniej 5 par znajomych
$\Rightarrow \exists$ 3 znające się nawzajem (przez inspekcję)

$n \geq 2$, $p(n)$ – prawda, weryfikujemy $p(n+1)$:
$2n+2$ osoby, $\geq (n+1)^2+1$ par znajomych.

Niech A, B – ustalona para znajomych,
S – zbiór pozostałych $2n$ osób.

Jeśli wśród S jest $\geq n^2+1$ par znajomych, to ponieważ $p(n)$ jest prawdziwe, jest wśród nich żądana trójka. W przeciwnym razie, jest co najmniej $2n+1$ par (bo $(n+1)^2+1 = n^2+2n+2$) postaci $\{A, C\}$ lub $\{B, C\}$, $C \in S$, i z zas. szufl. $\exists C$: $\{A, C\}$ i $\{B, C\}$ są parami znajomych. $\square$

Zasada silnej indukcji matem.

Niech $n_0 \in \mathbb{N}_0$. Jeśli

(a) $p(n_0)$ jest prawdziwe

(b) $\forall k \geq n_0$: prawdziwa jest implikacja

$$\left(p(n_0) \wedge p(n_0+1) \wedge \ldots \wedge p(k)\right) \Rightarrow p(k+1),$$

to $p(n)$ jest prawdziwe dla wszystkich $n \geq n_0$.

Pr 20 Gra NIM (jedna z wersji)

Na stole jest n żetonów. 2 Gracze, A i B, na przemian, zabierają od 1 do 3 żetonów. Przegrywa ten, kto weźmie ostatni żeton.

Jak w każdej grze skończonej, o pełnej informacji, jeden z graczy ma strategię zwycięską.

Pokazać, że w tej grze drugi gracz (B) ma strategię zwycięską wtedy $n = 4j+1$, $j = 0, 1, \ldots$.

R: $n_0 = 1 = 4 \cdot 0 + 1$ – A przegrywa (a) zachodzi
$k = 1, 2, 3$: $p(k+1)$ – prawda, bo dla $n = 2, 3, 4$ A wygrywa.
$k \geq 4$, $k+1 = 4j + r$, $0 \leq r \leq 3$; gdy $r = 0$, A usuwa 3 żetony, pozostawiając $k-2 = 4j - 3 = 4(j-1)+1$ i na podst. zał. ind. $p(k-2)$ A ma strategię zwycięską, bo teraz to on jest 2-gim graczem.

(12b)

Gdy $r=2$ lub $r=3$, to A usuwa $r-1$ żetony, pozostawiając $k+1-(r-1)=4j+1$ żetony, i ponownie A ma strategię zwycięską.

W końcu, gdy $r=1$, to A musi pozostawić na stole $k=4j$ lub $k-1=4(j-1)+3$ lub $k-2=4(j-1)+2$ żetony.

Zatem na podstawie $p(k)$, $p(k-1)$, lub $p(k-2)$, B, jako teraz 1. gracz, ma strategię zwycięską.

$\square$