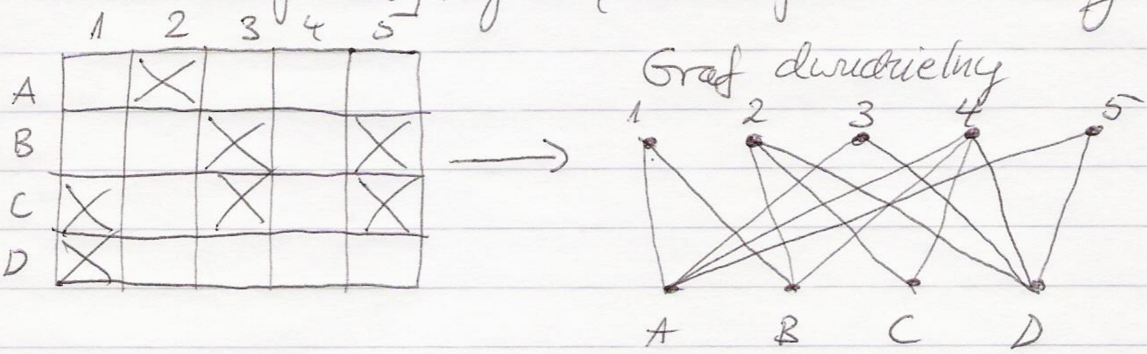
W10. Skojarzenia, kolorowanie, planarność

Prz1 Rozważmy szachownicę $m \times n$, na której pewne pola są zabronione. Podaj największą liczbę wież, które można postawić na (niezabronionych polach) tej szachownicy tak, by się nawzajem nie biły?

Np.



Prz2 Firma oferuje n stanowisk pracy, na które zgłasza się m kandydatów, przy czym każdy kandydat ma kwalifikacje tylko do niektórych stanowisk. Przypisz kandydatów do prac tak, by jak najwięcej z nich otrzymało posady.

Np. A ma kwalifikacje do prac 1,3,4,5, B – 1,2,4, C – 2,4, D – 2,3,4,5

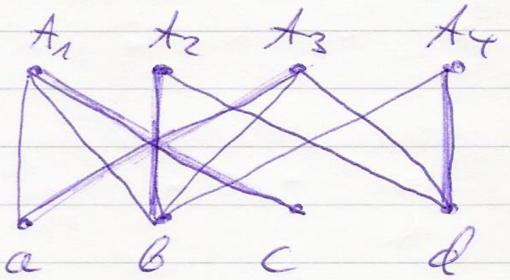
Sytuację tę ilustruje ten sam graf co w Prz1.

Prz3 Niech $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq Y$. Czy można wybrać po 1 elemencie (reprezentancie) z każdego zbioru tak, by wszystkie wybrane elementy były różne?

Ciąg $(a_1, \ldots, a_n)$ różnych el. zb. Y takich, że $a_i \in A_i$, $i = 1, \ldots, n$ nazywamy Systemem Różnych Reprezentantów (SRR) rodziny zbiorów $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$.

Np. $A_1 = \{a, b, c\}$, $A_2 = \{b, d\}$

$A_3 = \{a, b, d\}$, $A_4 = \{b, d\}$



(c, b, a, d) jest SRR

Def. Skojarzeniem w grafie $G = (V, E)$ nazywamy każdy podzbiór $M \subseteq E$ złożony z rozłącznych krawędzi, tzn. $\forall e, f \in M: e \neq f \Rightarrow e \cap f = \emptyset$.

Moc największego skojarzenia w G oznaczamy przez $\beta(G)$.

Oczywiście, $\beta(G) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Skojarzenie o mocy $\frac{n}{2}$ nazywamy doskonałym.

W grafie dwudzielnym $G = (V = X \cup Y, E)$.

$$\beta(G) \leq \min(|X|, |Y|)$$

O skojarzeniu mocy $|X|$ mówimy, że nasyca zbiór X.

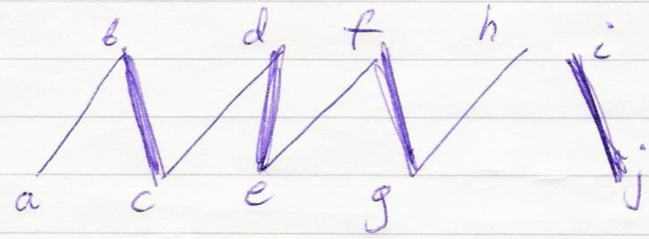
<u>Def.</u> Niech M będzie skojarzeniem w G.
Ścieżkę P w G nazywamy M-rozszerzającą, gdy

(i) co druga krawędź P należy do M

(ii) końce P nie należą do M. (do żadnej krawędzi M)

<u>Prz4</u>

P



‖ – M

P jest M-rozszerzająca

$M' = \{ab, cd, ef, gh, ij\}$ jest większe (o 1) od M.

<u>Oczywiste</u>: Jeśli $|M| = \beta(G)$, to w G nie ma ścieżki M-rozszerzającej.

<u>TW 1</u> (Berge) Skojarzenie M jest największe w G wgdy w G nie ma ścieżki M-rozszerzającej $\square$

Wracamy do grafów dwudzielnych $G=(X,Y,E)$, $|X| \leq |Y|$.

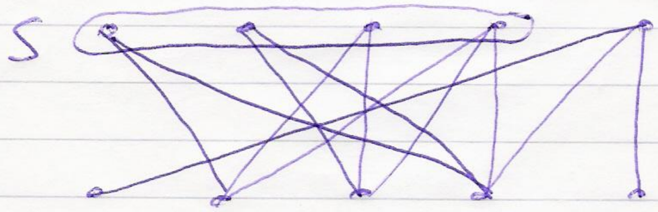
<u>Oznaczenie</u>: dla $S \subseteq X$, $N(S) = \bigcup_{v \in S} N_G(v)$.

<u>Oczywiste</u>: Jeśli $\exists\, S \subseteq X : |N(S)| < |S|$, to w G nie ma skojarzenia nasycającego X.

<u>TW2</u> (Hall) $G=(X,Y,E)$, $|X|\leq|Y|$, ma skojarzenie nasycające X wtedy zachodzi warunek Halla:

$\forall\, S\subseteq X: |N(S)|\geq |S|$. □

<u>Pr5</u>



<u>WN1</u> Jeśli graf dwudzielny jest regularny, to ma skojarzenie doskonałe (<u>ćw.</u>) □

<u>WN2</u> Jeśli graf dwudzielny jest k-regularny, $k\geq 1$, to E można rozbić na k rozłącznych skojarzeń doskonałych. (ćw: WN1 + indukcja) □

<u>Def.</u> Funkcję $f: E\to\{1,2,\dots,k\}$ nazywamy <u>właściwym kolorowaniem krawędzi</u> grafu $G=(V,E)$, gdy $\forall\, i=1,2,\dots,k: f^{-1}(i)$ jest skojarzeniem w G.

Najmniejszą liczbę k, ~~dla~~ której istnieje takie kolorowanie nazywamy <u>indeksem chromatycznym</u> grafu G i oznaczamy przez $\chi'(G)$.

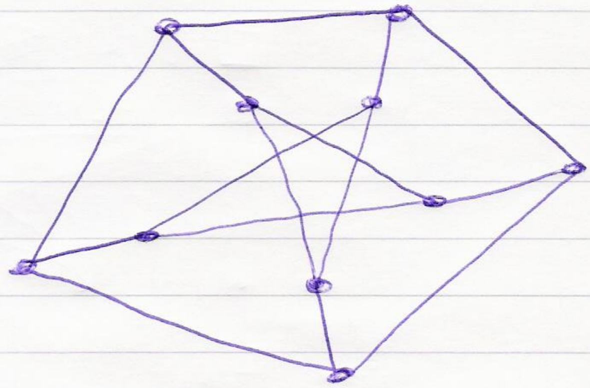
<u>Oczywiście</u>: $\chi'(G)\geq\Delta(G)$ – maks. stopień w G.

TW3 (Vizing) $\forall G$

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G)+1$$

Prz6 Graf Petersena

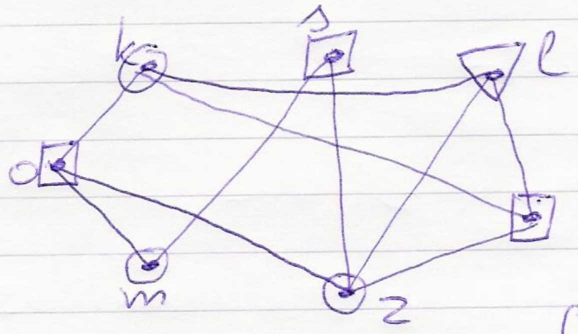
$$\chi' = 4$$



Def Funkcję $f: V \to \{1,2,\dots,k\}$ naz. właściwym kolorowaniem wierzchołków grafu $G=(V,E)$, gdy $\forall i=1,2,\dots,k$: $f^{-1}(i)$ jest zbiorem niezależnym, tzn. zbiorem wierzchołków indukującym w G podgraf pusty.

Najmniejszą liczbę k, dla której istnieje takie kolorowanie nazywamy liczbą chromatyczną grafu G i oznaczamy przez $\chi(G)$.

Prz7 Budujemy domowe zoo. Mamy słonia (s), lwa (l), wilka (w), zająca (z), mysz (m), orła (o) i kozę (k). Chcemy je umieścić w możliwie najmniejszej liczbie ogrodzeń (wybiegów). Ile ogrodzeń wystarczy?



nie mogą być razem

$\exists$ 3-kolorowanie właściwe

○ – 1, □ – 2, ▽ – 3

$f^{-1}(1)=\{k,o,z\}$, $f^{-1}(2)=\{s,w,o\}$,

$f^{-1}(3)=\{l\}$, zatem $\chi \leq 3$.

Ale $\exists K_3$, więc $\chi \geq 3$. Stąd $\chi = 3$. □

Oczywiste: Jeśli $G \supseteq K_l$, to $\chi(G) \geq l$.

Algorytm zachłanny:

WE: $G=(V,E)$

(1). $U=\emptyset$, $W=V$

(2) Dopóki $W \neq \emptyset$, wybierz dowolne $w \in W$ i nadaj mu pierwszy wolny kolor, tzn. kolor nie występujący wśród jego sąsiadów;
$U = U \cup \{w\}$, $W = W \setminus \{w\}$.

WY: właściwe kolorowanie wierzchołków G.

Oczywiste: Algorytm zachłanny używa $\leq \Delta(G)+1$ kolorów. Zatem $\chi(G) \leq \Delta(G)+1$.

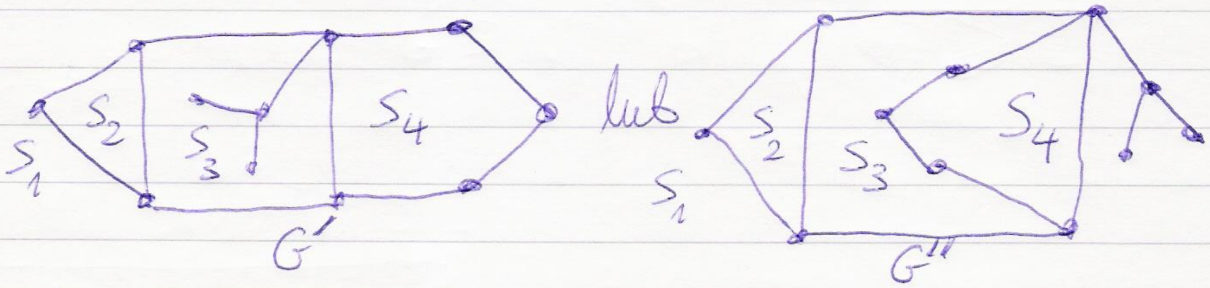
TW 4 (Brooks) Niech G będzie grafem spójnym. Wtedy $\chi(G) \leq \Delta(G)$, chyba że $G = C_{2m+1}$ lub $G = K_m$ $(m \geq 1)$

□

<u>Graf planarny</u> to graf, który można narysować na płaszczyźnie bez zbędnych przecięć, tzn. krawędzie są krzywymi, które nie przecinają samych siebie, a 2 krawędzie przecinają się tylko w ich wspólnym końcu.

Każdy poprawny rysunek grafu planarnego G nazywamy płaską realizacją grafu G lub, krótko, <u>grafem płaskim</u> grafu G.

<u>Prz8</u>



Graf płaski dzieli płaszczyznę na rozłączne obszary zwane „ścianami".

Niech G będzie grafem planarnym o $|V|=n$ i $|E|=e$ i niech G'' będzie grafem płaskim grafu G o ścianach $S_1, \ldots, S_f$ otoczonych przez, odpowiednio, $b_1, \ldots, b_f$ krawędzi. Wtedy

$$\sum_{i=1}^{f} b_f = 2e$$

W Prz8. w G' mamy $b_1=8$, $b_2=3$, $b_3=10$, $b_4=5$ i $\sum_{i=1}^{4} b_i = 26 = 2 \cdot 13$, a w G'' $b_1=11$, $b_2=3$, $b_3=7$, $b_4=5$.

<u>Uwaga</u>: Każdy most jest liczony 2-krotnie na „brzegu" ściany, do której należy, a każdy nie-most leży na brzegu 2 ścian.

TW5 (Wzór Eulera) Jeśli G jest grafem spójnym planarnym, $|V|=n$, $|E|=e$, to każdy graf płaski grafu G ma $f=e-n+2$ ścian.

dowód indukcyjny wzgl. e — na ćwiczeniach □

WN3 Jeśli G jest spójny planarny, to $|E| \leq 3|V|-6$

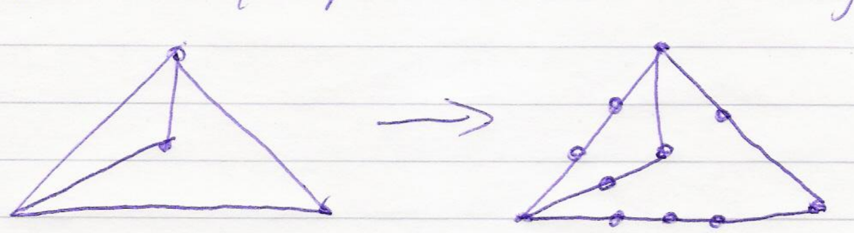
d: Mamy $3f \leq 2e$ plus wzór Eulera □

Zatem K_5 nie jest planarny.

Podobnie, $K_{3,3}$ nie jest planarny (ćw.).

Def. Podpodziałem (subdivision) grafu G nazywamy każdy graf otrzymany z G przez zastąpienie jego krawędzi rozłącznymi ścieżkami dowolnej dod. długości.

Np.



Niech H będzie podpodziałem G.

Oczywiste: G jest planarny $\Leftrightarrow$ H jest planarny.

Stąd, jeśli G jest planarny, to nie zawiera podpodziału K_5 ani $K_{3,3}$.

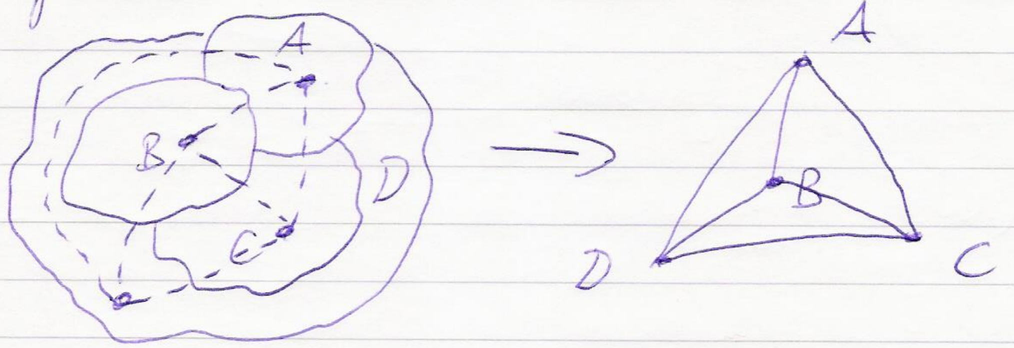
TW6 (Kuratowski) (1930)

G jest planarny wgdy nie zawiera podpodziału K_5 ani $K_{3,3}$ □

Hipoteza 4 kolorów postawiona w 1852 roku głosiła, że każdą mapę można pomalować ≤ 4 kolorami tak, by sąsiednie kraje (regiony) miały różne kolory.

Z mapy można otrzymać graf planarny łącząc stolice krajów autostradami biegnącymi przez ich granice.

Pr 9



Zatem H4K głosi, że $\forall G$ planarnego: $\chi(G) \leq 4$.

Z WN3 wynika, że jeśli G jest planarny, to $\delta(G) \leq 5$.

Dzięki temu, sprytna modyfikacja alg. zachłannego kolorowania daje
$$\chi(G) \leq 5+1=6.$$

W roku 1890 pokazano, że $\chi(G) \leq 5$, a dopiero w roku 1976 udowodniono H4K z pomocą komputerów.

Uwaga: pojęcie (multi)grafu dualnego - na ćwiczeniach!