W1. Metody dowodzenia twierdzeń

I. Implikacje

Większość twierdzeń matematycznych ma postać implikacji:

„Jeśli założenie, to teza"

Implikacja to zdanie złożone z 2 zdań: poprzednika p i następnika q.

Zapis $p \Rightarrow q$ (czasem też $p \rightarrow q$)

Każde zdanie ma wartość logiczną: „prawda" (1) lub „fałsz" (0).

Tabelka wartości logicznych dla implikacji:

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Twierdzenie to zdanie prawdziwe

Prz 1 „Jeśli dziś środa, to jutro jest piątek".
To zdanie jest prawdziwe we wszystkie dni tygodnia oprócz środy!

Prz 2 $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną.
(Jeśli $x=\sqrt{2}$, to x jest liczbą niewymierną)

Dowód twierdzenia ustala jego prawdziwość.
Jest wiele metod dowodu:

1) trywialna – pokazać, że q jest prawdziwe
(np., że jutro jest piątek)

2) pusta – pokazać, że p jest fałszywe
(np., że dziś nie jest środa)

3) wprost – założyć, że p jest prawdziwe
i wywnioskować, że q też.

Prz 3 Jeśli $3 \mid a-2$, to $3 \mid a^2-1$

Dowód $\exists k: a-2=3k \Rightarrow a^2-1=(a-1)(a+1) =$

$= (a+1)(3k+3) = 3(a+1)(k+1) \Rightarrow 3 \mid a^2-1$

$\square$

4) nie wprost, opiera się na równoważności

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$$

transpozycja
(kontrapozycja)

Pr4 Jeśli n^2 jest nieparzysta, to n też.

Dowód: Spróbujmy wpierw wprost:

$n^2 = 2k+1 \Rightarrow n = \sqrt{2k+1} \Rightarrow ???$

Nie wprost: polega na udowodnieniu transpozycji metodą wprost:

$n = 2k \Rightarrow n^2 = 4k^2 \Rightarrow n^2$-parzysta $\square$

Pr5 Jeśli $n = ab$, to $a \leq \sqrt{n}$ lub $b \leq \sqrt{n}$.

d: $a > \sqrt{n}, b > \sqrt{n} \Rightarrow ab > (\sqrt{n})^2 = n \Rightarrow n \neq ab$

$\square$

Pr6 Jeśli $p > 1$ jest najmn. dzielnikiem n, to p jest liczbą pierwszą

<u>d:</u> nie wprost: $\exists\, \substack{q>1\\ r>1} : p = q r \Rightarrow q | n,\ q < p$ $\square$

Z przykładów 5 i 6 wynika Algorytm

<u>Algorytm</u> (najmniejszy dzielnik)

WE: l. naturalna n

WY: najmn. dzielnik p liczby n

1. Jeśli n parzyste, to $p=2$; STOP
2. Znajdź największą l. nat. $s \le \sqrt{n}$; $l := 3$
3. Znajdź najmn. liczbę pierwszą $x \in \{l, \ldots, s\}$

3a. Jeśli x nie istnieje, to $p := n$

4. Jeśli $x | n$, to $p := x$; STOP
5. $l := x+1$, go to 3.

5) przez zaprzeczenie (doprowadzenie do sprzeczności), opiera się na

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg (p \wedge \neg q)$$

Zakładamy prawdziwość $p \wedge \neg q$, tzn. że p prawdziwe, a q fałszywe, i wnioskujemy zdanie fałszywe (sprzeczność), np. $r \wedge \neg r$.

Pr7 $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną.

$p \wedge \neg q$: $\sqrt{2}$ jest l. wymierną $\Rightarrow \exists a,b,\ (a,b)=1$

tzn. a,b względnie pierwsze : $\sqrt{2}=\frac{a}{b} \Rightarrow 2=\frac{a^2}{b^2}$

$\Rightarrow 2b^2=a^2 \Rightarrow$ a jest parz., $a=2k$

$\Rightarrow b^2=\frac{a^2}{2}=\frac{4k^2}{2}=2k^2 \Rightarrow$ b jest parz.

— sprzeczność z zał., że $(a,b)=1$

$p \wedge \neg q \Rightarrow r \wedge \neg r$, gdzie $r=$ „$\exists a,b,\ (a,b)=1 : \sqrt{2}=\frac{a}{b}$"

Ta implikacja jest prawdziwa i ma fałszywy następnik, zatem poprzednik też jest fałszywy □

~~Pr8~~ Metoda ~~po~~ nie wprost jest szczególnym przypadkiem met. przez zaprzeczenie, gdzie $r=p$.

Pr8 Wśród 3 osób zawsze są 2 tej samej płci.

d: Przypuśćmy, że żadne 2 z nich nie są tej samej płci. Wtedy musiałyby istnieć 3 płcie. □

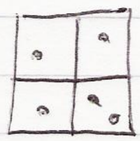
II Zasada szufladkowa

Zwana też zasadą Dirichleta
(ang: Pigeon-hole Principle)

„Jeśli więcej niż n gołębi zamieszkuje n gołębników, to w ~~ja~~ którymś gołębniku będą przynajmniej 2 gołębie". Dowód nie wprost

Prz8 (c.d.) ludzie to gołębie
płcie to gołębniki

Prz9 Jeśli umieścić 5 punktów w kwadracie o boku 2, to któreś 2 z nich będą odległe o $\leq \sqrt{2}$.

d: 
ćwiartki kwadratu – gołębniki
punkty – gołębie □

Prz10 Mamy n różnych par skarpetek pomieszanych w szufladzie. Ile najmniej trzeba na oślep wyjąć, by na pewno była wśród nich para?

R: n to za mało; $n+1$ wystarczy, bo skarpetki – gołębie, pary – gołębniki. □

Pr 11 Wybrano 5 punktów kratowych na płaszczyźnie (o całkowitych współrzędnych). Pokazać, że środek jednego z odcinków łączących je też jest punktem kratowym.

d: klasyfikujemy punkty kratowe według parzystości ich współrzędnych: 5 gołębi, 4 gołębniki
$\Rightarrow \exists$ 2 punkty $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$: $x_1 \equiv x_2$, $y_1 \equiv y_2 \pmod 2$
$\Rightarrow \frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}$ są całkowite. $\Box$

Pr 12 Mając 2 pudełka, zawsze można postawić jedno na drugim, tak by nie wystawało.

d: gołębie – 3 wymiary, gołębniki to pudełka ; wymiar wkładamy to pudełka, dla którego jest on większy (bądź równy).

Załóżmy, że relacja znajomości wśród ludzi jest symetryczna i antyzwrotna.

Prz13 Wśród dow. n osób istnieją 2 o tej samej liczbie znajomych.

d: $\#$znajomych $\in \{0, 1, \dots, n-1\}$, ale 0 i $n-1$ się wykluczają.

Zatem, jest tylko $n-1$ wartości (gołębników) i n osób (gołębi). $\square$

Uogólnienia zasady szufladkowej:

Zasada średniej: Jeśli N gołębi zamieszkuje m gołębników, to w którymś gołębniku jest co najmniej $\lceil \frac{N}{m} \rceil$ gołębi, a w którymś, co najwyżej $\lfloor \frac{N}{m} \rfloor$.

W szczególności, jeśli $N \geq km+1$, to $\exists$ gołębnik z $\geq k+1$ gołębiami. (Uóg. zas. szuf.)

Inne sformułowanie Z. śr. Dane l. rzecz. $a_1, \dots, a_m \Rightarrow$ $\exists i: a_i \leq \frac{1}{m} \sum a_i$ oraz $\exists i: a_i \geq \frac{1}{m} \sum a_i$.

<u>Pr14</u> Wśród 6 osób, zawsze są 3 znające się nawzajem lub 3 nieznające się nawzajem.

<u>d:</u> Rozważmy relację osoby A z B, C, D, E, F. Stosujemy uogólnioną zas. szufl. z $m=2$ (2 gołębniki: znać się, nie znać się), $k=2$ i $N=5$

$\Rightarrow$ A zna 3 lub nie zna 3 osób spośród $B, \dots, F$. Bez straty ogólności (= przez symetrię, analogię), załóżmy, że A zna B, C, D. Zatem albo B, C, D nie znają się nawzajem, albo pewna parę spośród nich i A znają się nawzajem. $\square$

<u>Zasada podziałowa</u> Jeśli włożyć $a_1 + \dots + a_m - m + 1$ kul do m urn $U_1, \dots, U_m$, to $\exists i$: U_i zawiera $\geq a_i$ kul ~~oraz $\exists i$: U_i ma $\leq m_i$ kul~~

d: nie wprost ... $\square$

<u>Pr15</u> Wśród 10 osób jest albo ≥ 7 kobiet albo ≥ 4 męż.

<u>d:</u> Zas. podz. z $a_1 = 7$, $a_2 = 4$ $(10 = 7 + 4 - 2 + 1)$ $\square$