Struktury Dyskretne

Zestaw Zadań #7

Na: poniedziałek, 20 maja

1. Przypominam oznaczenie z wykładu:

$$\alpha(x_1,\dots,x_n)=\max_{\mathcal{F}\subset 2^{[n]}}\{|\mathcal{F}|:\ \forall A,B\in\mathcal{F}:\ |x_A-x_B|<1\},$$

   gdzie $x_A=\sum_{i\in A}x_i$. Pokazać, że $\alpha(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n)=\alpha(x_1,\dots,-x_i,\dots,x_n)$.

2. Wyznaczyć $\alpha(1,3/2,-5/2,-2,3)$.

3. W nawiązaniu do dowodu Tverberga tw. Dilwortha, pokazać, że $T\cap B=A$.

4. Udowodnić dualne tw. Dilwortha: W każdym skończonym posecie X moc największego łańcucha równa się minimalnej liczbie antyłańcuchów pokrywających X.

   Wskaz.: użyc funkcji $r:X\to\mathbf{N}_0$ danej wzorem

$$r(x)=\max\{|L|-1:\quad L\in\mathcal{L}_x\},$$

   gdzie $\mathcal{L}_x$ jest zbiorem łańcuchów o największym elemencie x.

5. Narysuj diagram Hassego (czyli graf bezpośrednich porównań, gdzie krawędź xy idąca w górę oznacza, że $x\leqslant y$, $x\neq y$ i nie ma żadnego $z\neq x,y$ spełniającego $x\leqslant z\leqslant y$) posetu liczb naturalnych od 1 do 10 z relacją podzielności. Wyznacz moc największego łancucha, największego antyłańcucha, najmniejszego pokrycia łańcuchami i najmniejszego pokrycia antyłańcuchami. Zweryfikuj tw. Dilwortha i dualne tw. Dilwortha.

6. Udowodnić lemat Dilwortha: Dla dowolnych liczb naturalnych a,b, każdy poset X rzędu $|X|\geqslant ab+1$ zawiera albo łańcuch mocy $a+1$ albo antyłańcuch mocy $b+1$.

7. Wywnioskuj tw. Erdősa-Szekeresa z lematu Dilwortha.

8. (Dla chętnych) Wywnioskuj tw. DGR (tw. 4 z I części wykładów) z lematu Dilwortha. Wskaz.: Spójrz na krawędzie skojarzenia jak na przedziały na prostej.