Struktury Dyskretne

Zestaw Zadan #4

Na: poniedziałek, 15 kwietnia i 22 kwietnia

1. Wyznacz $t(\pi)$, gdzie $\pi = (649135728)$, oraz $t(4)$ i $t(5)$.
2. Bliźnięta w permutacji π nazywamy *blokowymi*, gdy oba podciągi są segmentami π (tzn. składają sie z kolejnych elementów). Pokaż, że każda permutacja rzędu $n = k(k! + 1)$ zawiera bliźnięta blokowe mocy k. Wyraź k (asymptotycznie) jako funkcję n.
3. Bliźnięta w permutacji π nazywamy *ciasnymi*, gdy razem tworzą segment π. Pokaż, że każda permutacja rzędu $n \geqslant 6$ zawiera ciasne bliźnięta mocy 2.
4. Dla $r \geqslant 2$, *r-krotne bliźnięta* w permutacji π to każda rodzina r rozłącznych i wzajemnie podobnych podpermutacji π. Niech $t_r(n)$ bedzie rozmiarem największych r-krotnych bliźniąt w π, przy czym rozmiar to długość jednego z bliźniąt.

   (a) Wyznaczyć $t_3(\pi)$ dla permutacji $\pi = (14, 2, 1, 3, 18, 6, 10, 5, 4, 8, 15, 7, 17, 11, 13, 12, 9, 16)$.

   (b) Uogólnić Tw 6 (Gawron), pokazując, że *pnp* $t_r(\Pi_n) = O\left(n^{r/(2r-1)}\right)$.
5. W ciągu binarnym

   $$0\,1\,1\,0\,1\,0\,0\,1\,0\,1\,1\,0\,0\,0\,1\,0\,1\,0$$

   znajdź nadłuższą parę bliźniąt, bliźniąt blokowych oraz ciasnych.
6. Pokaż, że $f(n) \geqslant \lfloor n/3 \rfloor$. Następnie pokaż, że $f(n, k) \geqslant \lfloor n/(k + 1) \rfloor$.
7. Pokazać, że dla każdego k i $n > k + 1$, $f(n, k + 1) \geqslant f\left(\frac{k}{k+1}n, k\right)$. Wywnioskować stąd oraz z tw. 7, że $f(n, 3) \geqslant n/3 - o(n)$ i, ogólnie, że $f(n, k) \geqslant n/k - o(n)$.
8. Powielając dowód Faktu 1, pokazać, że $2f(n) \leqslant n - (k - 1)$, gdzie $n_{k-1} < n \leqslant n_k$, gdzie $n_k =:= (3^{k+1} - 1)/2$.
9. Pokaż, że ciąg U_{n+1}, zdefiniowany na wykładzie przez iterację $U_{n+1} = U_n\overline{U_n}$, powstaje z U_n przez podstawienie $0 \to 01$, $1 \to 10$.

   Wskaz. 1: udowodnić indukcynie, że $U_n = W_n$, gdzie $W_1 = 0$, a dla każdego $n \geqslant 1$ W_{n+1} powstaje z W_n przez powyższe podstawienie.

   Wskaz. 2: Zdefiniować operację *splotu* dwóch słów: dla $A = a_1 \cdots a_n$ i $B = b_1 \cdots b_n$, niech $A * B = a_1b_1 \cdots a_nb_n$. Następnie pokazać, że $W_{n+1} = W_n * \overline{W_n}$.
10. Pokaż, że wyrazy na pozycjach nieparzystych tworzą w U_{n+1} kopię U_n, a na parzystych – kopię $\overline{U_n}$. Wskaz.: Skorzystać z zad. poprzedniego i wskazówek do niego
11. Dokończyć dowód Lematu 2, analizując przypadek, gdy skrajne zera w B są czerwone (a środkowe jest niebieskie).
12. W dowodzie Tw. 11 wyjaśnić dlaczego $t_n \in \{1, 2, 3\}$ dla każdego $n \geqslant 1$.
13. (Dla chętnych) Rozważ ciąg Pera Noergårda: $N_0 = 0$, a dla każdego $n \geqslant 0$, $N_{2n+1} = N_n + 1$ oraz $N_{2n} = -N_n$.

   - Pokaż, że ciągi $U = (u_1, u_2, \ldots, ...)$ i $(N'_0, N'_1, \ldots)$, gdzie $N'_n = N_n(\mod 2)$, są identyczne, tzn., $u_n = N'_{n-1}$, $n \geqslant 1$. Wskaz.: Zauważyć, że dla każdego i parzystego $N'_i = N'_{i/2}$, a dla każdego i nieparzystego $N'_i = \overline{N'_{(i-1)/2}}$. Nastepnie użyć operacji splotu ze wskaz. 2 do zadania 9.
   - Poczytaj o duńskim kompozytorze Perze Noergårdzie i o roli ciągu $(N_0, N_1, \ldots)$ w jego muzyce.