Struktury Dyskretne

Zestaw Zadan #3

Na: poniedziałek, 8 kwietnia

1. Udowodnij, że dla każdego całkowitego $k \geqslant 1$ zachodzi nierówność $k! > (k/e)^k$.

2. Dokończyć dowód tw. 5 dla stosów, przyjmując $\epsilon = 1/5$ i $c = 2$. Tzn., zakładając, że pnp $|\mathcal{M}'_n| \geqslant 0,4n$ oraz że $\mathcal{M}_n$ nie zawiera fal mocy $k_0 = \lceil 2\sqrt{n} \rceil$, pokazać, że $\mathcal{M}_n$ zawiera stos mocy co najmniej $\sqrt{n}/5$.

3. Niech $X = |\mathcal{M}'_n|$. Korzystając z oszacowań w dowodzie tw. 5, pokazać, że
$$\frac{E(X(X-1))}{(EX)^2} - 1 = O(1/n).$$

4. *Skojarzeniem trójkowym rzędu* n nazywamy dowolny podział zbioru $[3n]$ na n rozłącznych 3-elementowych podzbiorów, których kolejność nie jest ważna.

   (a) Ile jest skojarzeń trójkowych rzędu n? Wymień wszystkie rzędu 2 (wygodnie jest użyć notacji literowej: 3 litery A i 3 litery B).

   (b) *Linią* w skojarzeniu trójkowym nazywamy każdy jego podzbiór trójek $t_1, \ldots, t_k$ taki, że dla każdego $i = 1, \ldots, k-1$, prawy element trójki t_i poprzedza (jest na lewo) lewy element trójki t_{i+1}. Np. w skojarzeniu $ABBCAADEDBDFEFCCEF$ linię tworzą krawędzie oznaczone przez A $(1, 5, 6)$, D $(7, 9, 11)$ i F $(12, 14, 18)$. Pokaż, że pnp wielkość największej linii w losowym skojarzeniu trójkowym jest $O(n^{1/3})$.

   (c) Znajdź (narysuj) skojarzenie trójkowe rzędu 3, w którym każde 2 krawędzie są w relacji (i) $ABBABA$, (ii) $AABBBA$, (iii) $AABABB$ lub uzasadnij, że takie skojarzenie nie istnieje.