# Struktury Dyskretne

## Zestaw Zadan #2

Na: poniedziałek, 11 marca

1. Permutacja długóści $2k$ jest typu $V$, gdy jej pierwszych $k$ elementów tworzy ciąg malejący, a pozostałe elementy – ciąg rosnący. Np. 64312578 i 86541237. Niech $Y_k$ bedzie liczbą podpermutacji typu $V$ długości $2k$ w permutacji losowej $\Pi_n$ rzędu $n$. Pokazać, że jeśli $k \geqslant c\sqrt{n}$, gdzie $c > e/\sqrt{2}$, to prawie na pewno $Y_k = 0$.

2. Niech $V = [4]$. (a) Narysuj wszystkie grafy o zbiorze wierzchołków $V$, z których żadne 2 nie są izomorficzne. Następnie, przelicz wszystkie grafy na $V$, z których żadne 2 nie są *porzadkowo*-izomorficzne. Wyciągnij konkluzję.

3. Rozważ grafy $G$, gdzie $V(G) = [4]$, $E(G) = \{12, 23, 24, 34\}$ i $H$, gdzie $V(H) = \{a, b, c\}$, $E(H) = \{ab, bc\}$. Przelicz, (a) ile podgrafów grafu $G$ jest izomorficznych z grafem $H$ oraz (b) ile podgrafów grafu $G$ jest porządkowo-izomorficznych z grafem $H$, zakładając, że zbiór $V(G)$ jest uporządkowany naturalnie ($1 < 2 < 3 < 4$), a zbiór $V(H)$ jest uporządkowany alfabetycznie ($a < b < c$).

4. Narysuj wszystkie 15 skojarzeń uporządkowanych zbioru [6].

5. Podaj przykład skojarzenia zbioru $[2n]$, gdzie $n = \ell sw$, które nie zawiera linii mocy $\ell + 1$, stosu mocy $s + 1$, ani fali mocy $w + 1$. (Zacznij od przypadku $\ell = s = w = 2$, później spróbuj uogólnić.)

6. Rozłóż poniższy krajobraz na rozłączne fale tak jak w dowodzie Tw. 4. Nastepnie znajdź najdłuższą linię.
$$ABCADEFBGHCDIJEFKGHILJKL$$

7. Wywnioskuj z Tw. 1 (ESz), że każde skojarzenie $M$ mocy $n = ks+1$ zawiera stos dł. $s+1$ lub krajobraz dł. $k+1$. Wskaz.: Przyporządkuj zbiorowi prawych końców krawędzi w $M$ permutację $n$-elementową.

8. Opisz i przelicz skojarzenia zbioru $[2n]$, w których żadne dwie krawędzie nie są typu $AABB$, tzn. nie tworzą linii. Jakiej wielkości stos lub falę mamy zagwarantowaną w takim skojarzeniu?

9. (Dla chętnych) Na wykładzie zdefiniowaliśmy *krajobraz* jako skojarzenie bez pary krawędzi typu $ABBA$, tzn. bez stosów. Teraz zdefiniujmy *pejzaz* jako skojarzenie bez pary krawędzi typu $ABAB$, tzn. bez fal. Pozkazać, że na $[2n]$ (a) jest tyle samo krajobrazów co pejzaży oraz (b) że ich liczba jest liczbą Catalana
$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$
Wskaz.: Wskazać bijekcję pomiedzy pejzażami a krajobrazami oraz bijekcję pomiędzy pejzażami a $(n, n)$-*ciągami zdominowanymi* (patrz np. *Wykłady z Kombinatoryki*, Palka, Ruciński, str. 58-60)