Struktury Dyskretne

Zestaw Zadan #1

Na: poniedziałek, 4 marca

1. Udowodnij, że każda permutacja długości 11 zawiera dwa *rozłączne* podciągi rosnące długości 3 lub dwa *rozłączne* podciągi malejące długości 3.
2. Wywnioskuj z tw. 1, że każda permutacja długości n zawiera podciąg monotoniczny długości $\lceil\sqrt{n}\rceil$.
3. Podaj przykład permutacji zbioru $[n] = \{1, \dots, n\}$, gdzie $n = ab$, która nie posiada podciągu rosnącego długości $a + 1$, ani podciągu malejącego długości $b + 1$.
4. Udowodnij następujący wariant tw. Erdősa-Szekersa: w dowolnym ciągu liczbowym dł. $n = abc+1$ istnieje podciąg ściśle rosnący dł. $a+1$ lub podciąg ściśle malejący dł. $b+1$ lub podciąg stały dł. $c + 1$. Następnie pokaż, że to tw. też jest optymalne (analogicznie do Zad. 3)
5. Wywnioskuj z tw. 1 następujący cykliczny wariant tw. Erdősa-Szekersa: w dowolnej permutacji cyklicznej dł. $(a - 1)(b - 1) + 2$ istnieje podciąg rosnący dł. $a + 1$ lub podciag malejący dł. $b + 1$. Uwaga: permutacja cykliczna to permutacja „nanizana" na okrag, a więc można ją odczytywać zaczynając od dowolnego miejsca; np. w $(6, 1, 4, 2, 7, 3, 5)$ podciągiem rosnacym jest $(1, 2, 3, 5, 6)$, a malejącym $(7, 5, 4, 2)$.
6. Uogólnij (i udowodnij) tw. 2 (lemat o 3 permutacjach) na $2r - 1$ permutacji, $r \geqslant 2$.
7. Pokaż, że nie da się poprawić $n^{1/3}$ w Tw. 2., tzn. znajdz kontrprz., najpierw dla $n = 8$, później uogólnij go dla n postaci $n = m^3$, w końcu na dowolne n.
8. W permutacjach 2857316904 i 8529741360 znajdź podpermutacje dł. 4, które są takie same lub jedna jest odwróceniem drugiej.
9. Udowodnij, że dla każdego $1 \leqslant k \leqslant n$, zdarzenie $\neg M_k$ implikuje zdarzenie $R_{n/k}$.
10. Wywnioskuj z poprzedniego zadania, że dla każdego $1 \leqslant k \leqslant n$, $P(R_k) + P(R_{n/k}) \geqslant 1$ oraz, że w szczególności, $P(M_{\sqrt{n}}) = P(R_{\sqrt{n}}) \geqslant \frac{1}{2}$.
11. (Zad. dla chętnych na wykorzystanie zas. szufl. w wersji iniekcyjnej. Sorry, że po angielsku :) A platoon of soldiers (all of different heights) is in rectangular formation on a parade ground. The sergeant rearranges the soldiers in each row of the rectangle in decreasing order of height. He then rearranges the soldiers in each column in decreasing order of height. Using the Pigeonhole Principle, or otherwise, prove that it is not necessary to rearrange the rows again; that is, the rows are still in decreasing order of height.