Bliźnięta

1. w permutacjach
2. w słowach

---

1) Def. Permutacje $\pi_1=(x_1,\dots,x_t)$ i $\pi_2(y_1,\dots,y_t)$ są podobne (izomorficzne), gdy $\forall\, 1\le i<j\le t$

$$x_i<x_j \iff y_i<y_j.$$

Bliźnięta w π to dwie rozłączne, podobne podpermutacje.

Pr. $\pi=6\,1\,\bar{4}\,3\,7\,9\,8\,\bar{2}\,\bar{5}$ 617 i 425 są podobne więc są bliźniętami w π (ale 617 i 925 NIE!)

$t(\pi)=\max\{|\pi_1|:\ \text{bliźnięta } \{\pi_1,\pi_2\} \text{ w } \pi\}$

$t(n)=\min\{t(\pi):\ \pi\in\Omega_n\}$ zb. wsz. $n!$ perm. zbioru $[n]$

Tw6 (Gawron '14) Pnp $t(\Pi_n)=O(n^{2/3})$
w szczeg., $t(n)=O(n^{2/3})$.

Uwaga 1. DGR '21, Bukh-Rudenko '20:

$$\text{pnp } t(\Pi_n)=\Theta(n^{2/3})$$

2. BR'20: $t(n)=\Omega(n^{3/5})$ – w oparciu o lemat o 3 perm.

dowód tw 6 $\quad X_k = \#$(par) bliźniąt mocy k w Π_n

$\forall\, S, T \in \binom{[n]}{k}$, $S \cap T = \emptyset$

$$I_{S,T} = \begin{cases} 1 & \text{gdy } \Pi_n \text{ ma bliźnięta na } S \text{ i } T \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

$$X_k = \sum_{S,T} I_{S,T}, \quad \mathbb{E}X_k = \frac{\binom{n}{k}(n-k)! \cdot 1}{n!} = \frac{1}{k!}$$

Legenda: $\binom{n}{k} = \#$ wyborów wartości na S

$(n-k)! = \#$ perm. na $[n] \setminus S$

$1 = \#$ perm. na T

$$\mathbb{E}X_k = \frac{1}{2}\binom{n}{2k}\binom{2k}{k}\frac{1}{k!} = \frac{(n)_{2k}}{2k!^3} < \frac{n^{2k}}{k!^3} < \left(\frac{e^3 n^2}{k^3}\right)^k \to 0$$

gdy $k \geq c n^{2/3}$, $c > e$; np. $k_0 = \lceil c n^{2/3} \rceil$

$$P(X_{k_0} \geq 1) \leq \mathbb{E}X_{k_0} \to 0 \Rightarrow_{pnp} t(\Pi_n) < k_0 \quad \square$$

---

2) słowo to ciąg $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $x_i \in A$

Podsłowo $\underline{x}' = (x_{i_1}, \dots, x_{i_j})$, $1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq n$

$\operatorname{supp}(\underline{x}') = \{i_1, \dots, i_j\}$

Podsłowa $\underline{x}'$, $\underline{x}''$ słowa $\underline{x}$ są rozłączne, gdy

$\operatorname{supp}(\underline{x}') \cap \operatorname{supp}(\underline{x}'') = \emptyset$.

Def. Bliźnięta w $\underline{x}$ to 2 rozłączne, identyczne podsłowa.

$$f(\underline{x}) = \max\{m : \underline{x} \text{ ma bliźnięta mocy } m\}.$$

Prz $\underline{x} = 0001010$, $x_1 x_2 x_4 = x_3 x_5 x_6 = 001 \Rightarrow f(\underline{x}) = 3$.

$$f(n, A) = \min\{f(\underline{x}) : \underline{x} \in A^n\}$$

Gdy $|A| = k$, to piszemy $f(n,k)$ zamiast $f(n,A)$. Ponadto, dla słów binarnych $f(n) := f(n,2)$.

~~[illegible]~~ **Obs** $f(n) \geq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ (ćw.)

Tw (Axenovich, Person, Puzynina '13) $\exists\, c_1, c_2$:

$$n - c_1 \left(\frac{\log\log n}{\log n}\right)^{\frac{1}{4}} n \leq 2f(n) \leq n - c_2 \log n.$$

W szczeg., $f(n) \sim \frac{n}{2}$.

dowód (tylko oszac. górne)

Najpierw szczeg. przyp., gdy $n = \frac{3^{k+1}-1}{2} = 1 + \ldots + 3^k =: n_k$.

Konstrukcja:

$$\underline{x}^{(k)} = \begin{cases} \underbrace{0\cdots0}_{3^k}\underbrace{1\cdots1}_{3^{k-1}}\cdots\underbrace{111111111}_{9}0001, & \text{gdy } k \text{ niepar.} \\ \underbrace{1\cdots1}_{3^k}\underbrace{0\cdots0}_{3^{k-1}}\cdots 111111111\,0001, & \text{gdy } k \text{ parz.} \end{cases}$$

Fakt 1 $\quad 2f(\underline{x}^{(k)}) \le n_k - k \quad \forall k=0,1,2,\dots$

dow. (ind. po k) $\quad k=0,1,2$ – przez inspekcję

np. $f(\underline{x}^{(2)})=5$, $n_2=13$

Zał., że $2f(\underline{x}^{(k-1)}) \le n_{k-1}-(k-1)$, $k\ge 3$

Niech A, B – supporty najdł. bliźniąt w $\underline{x}^{(k)}$.

Niech $S_0, S_1,\dots,S_k$ – supporty kolejnych (od prawej) serii w $\underline{x}^{(k)}$.

Przyp. I $\quad |A\cap S_k|=|B\cap S_k|$. Wtedy na zbiorach pozycji $A\setminus S_k$, $B\setminus S_k$ są bliźniętami w $\underline{x}^{(k-1)}$.

Ponadto, $|A\cap S_k|+|B\cap S_k| \le 3^k-1$ (bo parzystość)

$$\Rightarrow 2f(\underline{x}^{(k)}) = |A+B| \le 3^k-1+2f(\underline{x}^{(k-1)})$$

$$\le 3^k-1+n_{k-1}-(k-1) = n_k-k, \quad \text{bo } 3^k+n_{k-1}=n_k.$$

Przyp II $\quad |A\cap S_k|>|B\cap S_k| \Rightarrow B\cap S_{k-1}=\emptyset$ (why?)

(1) $|A\cap S_{k-1}|\le 3^{k-1}-k \Rightarrow |A|+|B|\le n_k-k$

(2) $|A\cap S_{k-1}|\ge 3^{k-1}-k+1 \Rightarrow$ B nie odrobi straty z S_{k-1}, bo

$$|S_0|+\dots+|S_{k-3}| = \frac{3^{k-2}-1}{2} \le 3^{k-1}-k \quad \text{(z dużym zapasem!)} \ ↯$$

□

$\forall n\ \exists!\, k: \ n_{k-1}<n\le n_k$.

$\underline{x}(n)$ = jak $x^{(k)}$, ale $|S_k|=3^k-(n_k-n)$. Powielając dow. F1,

$f(\underline{x}(n))\le n-(k-1)$ (ćw). Mamy $3^{k+1}\ge 2n+1 \Rightarrow k-1\ge c_2\log n$ □