2. Systemy Spernera

Def Rodzinę zbiorów $\mathcal{F}$ naz. Systemem Spernera (SS), gdy żaden set nie zawiera się w innym, tzn. $A, B \in \mathcal{F}$, $A \neq B \Rightarrow A \not\subseteq B$.

Problem Dla $X = [n]$ wyznaczyć

$$\alpha_n = \max\{|\mathcal{F}| : (X, \mathcal{F}) \text{ jest SS}\}.$$

Łatwo: $\alpha_n \geq m := \max\limits_{k \in [n]} \binom{n}{k} = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$

[bo zbiory równej mocy nie mogą się zawierać]

Tw 2 (Sperner, 1928) $\alpha_n = m$

dowód: Strategia: rozbić $\mathcal{P}(X)$ na m łańcuchów $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_m$, tzn. $\mathcal{P}(X) = \mathcal{L}_1 \cup \dots \cup \mathcal{L}_m$.
To $\Rightarrow$ $\alpha_n \leq m$, co kończy dowód.
Łańcuchy konstruujemy iteracyjnie w oparciu o Wn 4 oraz analogiczny fakt (zad. dom.):

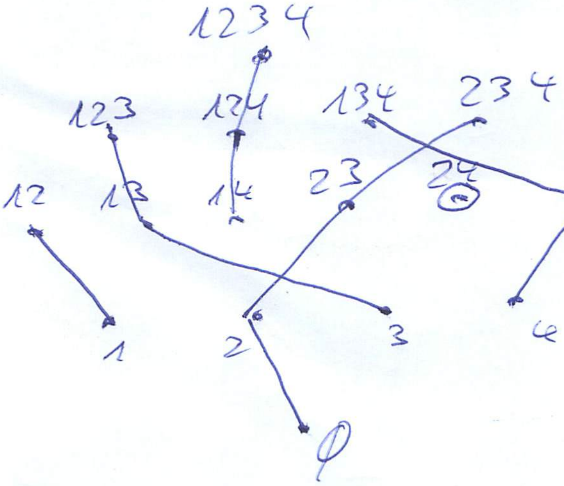
$$\forall r > \frac{n}{2} \ \exists g_r : \binom{X}{r} \xrightarrow{1-1} \binom{X}{r-1} : A \supset g_r(A).$$

Konkretnie, dla $A \in \binom{X}{r}$, $r < \frac{n}{2}$, kładziemy A i $f_r(A)$ na tym samym łańcuchu, a dla $A \in \binom{X}{r}$, $r > \frac{n}{2}$, kładziemy A i $g_r(A)$ na tym samym łańcuchu.
[Dla n niepar. nie wykonujemy kroku dla $r = \frac{n+1}{2}$, bo by kolidował z $r = \frac{n-1}{2}$.]

Dla n-parzystego, obie „zgraje" łańcuchów kończą bieg na środkowym poziomie $\frac{n}{2}$.
Tam niektóre pary łączą się w pojedyncze łańcuchy.
Elementy wolne stanowią łańcuchy 1-element.
Tak czy siak, dostajemy $m=\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ rozł. łańcuchów pokrywających całe $\mathcal{P}(X)$ $\square$

Ilustracja

$n=4$, $m=\binom{4}{2}=6$



← 6 łańcuchów

Uogólnienie

Tw 3 (Nierówność LYM, Lubell '66, Yamamoto '54, Mieszalkin '63)

Jeśli $(X,\mathcal{F})$ jest SS, $|X|=n$, $a_k=\left|\mathcal{F}\cap\binom{X}{k}\right|$, $k=0,\dots,n$,

to $$\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{\binom{n}{k}}\le 1 \quad \left(\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\binom{n}{|A_i|}}\le 1,\ \mathcal{F}=\{A_1,\dots,A_m\}\right)$$

Dowód (Lubell) Mówimy, że permutacja zbioru X „zawiera" zbiór $A\in\mathcal{P}(X)$, gdy $\pi=(x_1,\dots,x_n)$, a $A=\{x_1,\dots,x_{|A|}\}$.
Np. dla $n=5$, $\pi=(2,4,1,5,3)$ „zawiera" zbiory $\{2\}$, $\{2,4\}$, $\{1,2,4\}$ itd.

Ponieważ $\mathcal{F}$ jest SS, to $\forall \pi$ zawiera ≤ 1 zbiór $A \in \mathcal{F}$. Z drugiej strony, $\forall A \in \mathcal{F}$ A jest „zawarty" w dokładnie $|A|!(n-|A|)!$ permutacjach. Stąd, $\sum_{i=1}^{m} |A_i|!(n-|A_i|)! \leq n!$, bo każda perm. jest liczona ≤ 1 po lewej stronie. Formalnie,

$$\sum_{i=1}^{m} |A_i|!(n-|A_i|)! = \left|\{(\pi, i) : \pi \text{ „zawiera" } A_i\}\right| \leq n!$$

To jest metoda podwójnego przeliczania, raz zaczynając od π, a raz od i. Dzieląc przez $n!$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \frac{|A_i|!(n-|A_i|)!}{n!} \leq 1 \qquad \square$$

<u>Uwaga</u> Tw 3 $\Rightarrow$ Tw 2 (zad. dom.)

<u>Zastos.</u> Problem Littlewooda-Offorda (1943)

Niech $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}$, $|x_i| \geq 1$. Utwórz wsz. 2^n sumy częściowe $x_A = \sum_{i \in A} x_i$, $A \subseteq [n]$. $\left[\sum_{\emptyset} = 0\right]$

<u>Problem</u> Ile z tych sum może różnić się wzajemnie od siebie o mniej niż 1?

<u>Tw4 (Erdős, 1945)</u> Co najwyżej $m = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

<u>dow</u> BSO załóżmy, że $x_i \geq 1$ $\forall i$. [zad. dom.] <u>Nasz cel:</u>

$$\alpha(x) = \max_{\mathcal{F} \subset \mathcal{B}([n])} \{|\mathcal{F}| : \forall A, B \in \mathcal{F} : |x_A - x_B| < 1\}$$

$\longrightarrow$

Niech $\mathcal{F}$ spełnia war. z def. $\alpha(x)$.

Wtedy $\mathcal{F}$ jest SS. Rzeczywiście,

dla $A \subsetneq B$ mamy $x_B - x_A = x_{B \setminus A} \geq 1$ ~~sprzeczność~~

czyli w $\mathcal{F}$ nie ma takiej pary zbiorów.

Z 1 i 2, $|\mathcal{F}| \leq m \Rightarrow \alpha(x) \leq m$ $(\forall x)$ $\square$