II Ekstremalna teoria zbiorów

1. Systemy różnych reprezentantów

Def 1 Rodzina (system) zbiorów to para $(X, \mathcal{F})$, $|X| < \infty$, $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X) := \{Y : Y \subseteq X\}$

Def 2 System różnych reprezentantów (SRR) rodziny $\mathcal{F} = \{A_1, \dots, A_m\}$ naz. ciąg $(x_1, \dots, x_m)$ różnych elementów taki, że $\forall i = 1, \dots, m$ $x_i \in A_i$.

Pz 1 $A_1 = \{2, 4\}$, $A_2 = \{1, 2, 3\}$, $A_3 = \{2, 3, 4\}$, $A_4 = \{1, 4\}$

$(2, 1, 3, 4)$

Pz 2 $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{1, 3\}$ $A_3 = \{1, 4\}$ $A_4 = \{1, 2, 3\}$ $A_5 = \{5, 6\}$ $A_6 = \{2, 3\}$

Nie ma SRR! Bo $A_1 \cup A_2 \cup A_4 \cup A_6 = \{1, 2, 3\}$

War. konieczny Jeśli $(x_1, \dots, x_m)$ jest SRR rodziny $\{A_1, \dots, A_m\}$, to

$$(H) \ \forall S \subseteq [m] : \left|\bigcup_{i \in S} A_i\right| \geq |S| \quad \left[\text{Bo } \bigcup_{i \in S} A_i \supset \bigcup_{i \in S} \{x_i\}\right].$$

Tw 1 (Hall, 1935)

$\mathcal{F} = \{A_1, \dots, A_m\}$ ma SRR $\Leftrightarrow$ zachodzi (H)

dowód (tylko $\Leftarrow$) Indukcja po m ($m = 1$ - trywialne)

Niech $\mathcal{F}=\{A_1,\dots,A_m\}$ spełnia war. (H), $m\geq 2$.
[Załóżmy, że Tw 1 jest prawdziwe dla wsz. $m'<m$.]

Przyp. I $\forall\, \emptyset\neq S\subsetneq[m]$ $\left|\bigcup_{i\in S}A_i\right|\geq|S|+1$ (nadmiar)

Weź dowolne $x_m\in A_m$, zdefiniuj $A_i'=A_i\setminus\{x_m\}$, $i=1,\dots,m-1$
Pokażemy, że rodzina $\mathcal{F}'=\{A_1',\dots,A_{m-1}'\}$ spełnia (H).
Niech $S\subseteq[m-1]$. Wtedy

$$\left|\bigcup_{i\in S}A_i'\right|\geq\left|\bigcup_{i\in S}A_i\right|-\underset{\uparrow \text{brak } x_m}{1}\geq(|S|+1)-1=|S|.$$

Zatem, z zał. ind. $\mathcal{F}'$ ma SRR $(x_1,\dots,x_{m-1})$.
Stąd $(x_1,\dots,x_m)$ jest SRR $\mathcal{F}$.

Przyp II. $\exists\,\emptyset\neq S\subsetneq[m]$: $\left|\bigcup_{i\in S}A_i\right|=|S|$

Z zał. ind. $\mathcal{F}_1=\{A_i: i\in S\}$ ma SRR $(x_i: i\in S)$. (*)
Niech $X_1=\{x_i: i\in S\}$. Mamy $|X_1|=|S|=\left|\bigcup_{i\in S}A_i\right|$, skąd
$X_1=\bigcup_{i\in S}A_i$.

$\forall i\in[m]\setminus S$: $A_i'=A_i\setminus X_1$, $\mathcal{F}_2=\{A_i': i\in[m]\setminus S\}$

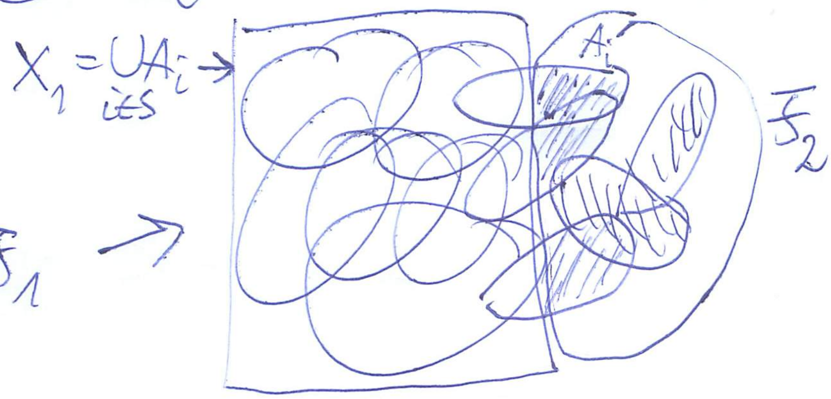
Pok., że $\mathcal{F}_2$ spełnia (H): $\forall\, T\subseteq[m]\setminus S$

$$\left|\bigcup_{i\in T}A_i'\right|=\left|\bigcup_{i\in T}A_i\cup X_1\right|-|X_1|\overset{(*)}{=}\left|\bigcup_{i\in S\cup T}A_i\right|-|S|\geq$$
$$\overset{(H)}{\geq}(|S|+|T|)-|S|=|T|\ \checkmark$$

Zatem, z zał. ind. $\mathcal{F}_2$ ma SRR $(x_i : i \in [m] \setminus S)$ (3)

$\Rightarrow (x_1, \dots, x_m)$ jest SRR całej $\mathcal{F}$ $\boxtimes$

Ilustracja cz. II dowodu



Wn 1 (Tw Halla z defektem) Niech $d \geq 0$.

Z rodziny $\mathcal{F} = \{A_1, \dots, A_m\}$ można usunąć $\leq d$ zbiorów, tak że pozostałe mają SRR $\Leftrightarrow$

$(H)_d \quad \forall S \subseteq [m] : \left|\bigcup_{i \in S} A_i\right| \geq |S| - d$ $\square$ (zad. dom.)

Wn 2 (Poligamiczne tw. Halla) Niech $d_1, \dots, d_m \in \mathbb{N}$ oraz $\mathcal{F} = \{A_1, \dots, A_m\}$. Istnieją rozłączne zbiory $D_i \subseteq A_i$, $|D_i| = d_i$, $i = 1, \dots, m$ $\Leftrightarrow$

$$\forall S \subseteq [m] : \left|\bigcup_{i \in S} A_i\right| \geq \sum_{i \in S} d_i$$ $\square$ (zad. dom.)

4

Def 3 Graf 2-dzielny to graf $G=(V,E)$ t. że $\exists V=V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $E \cap \binom{V_i}{2} = \emptyset$, $i=1,2$

$\forall v \in V: N(v) = \{u \in V: \{u,v\} \in E\}$ – sąsiedztwo v w G

$\forall S \subseteq V_1: \quad N(S) = \bigcup_{v \in S} N(v) \quad [\deg_G(v) = |N(v)|]$

Skojarenie w dow. grafie G_{2} to zbiór rozłącznych krawędzi M. Można go traktować jako podgraf.
M nasyca V_1 gdy $V(M) \supset V_1$.

Obs. G ma skoj. nasycające $V_1 \Leftrightarrow \{N(v): v \in V_1\}$ ma SRR.

Wn 3. (Tw Halla o małżeństwach) G ma skoj. nasycające $V_1 \Leftrightarrow \forall S \subseteq V_1: |N(S)| \geq |S|$ $\square$ (H)

Wn 4 Niech $n = |X| \geq 1$. $\forall r < \frac{n}{2} \left(\Leftrightarrow r \leq \frac{n-1}{2}\right)$
$\exists f_r: \binom{X}{r} \xrightarrow{1-1} \binom{X}{r+1}: \forall A \in \binom{X}{r}: f(A) \supset A$.

dowód: Rozważ graf 2-dzielny G z $V_1 = \binom{X}{r}$, $V_2 = \binom{X}{r+1}$ w którym $\{A,B\} \in E \Leftrightarrow A \subseteq B$. Zauważmy:
$\forall A \in V_1: \deg_G(A) = n-r$, $\forall B \in V_2: \deg_G(B) = r+1$.
Mamy $n-r \geq r+1$, więc z Zad 4 $\exists$ skoj. M nas. V_1.
M wyznacza f_r [jako $f_r(A) = B$, gdzie $\{A,B\} \in M$]