STRUKTURY DYSKRETNE 22/23

I. Ciągi, permutacje, słowa, ...

Def. Ciąg to $f: \Gamma \to W$,

Γ - zb. lin. uporz., W - dow. zb.

Γ - zb. przeliczalny (skończ. bądź nie)

długość ciągu

Najczęściej $\Gamma = \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ lub $\Gamma = [n] = \{1, \ldots, n\}$

Np. $(2, 4, 6, \ldots)$ $\Gamma = \mathbb{N}$, $W = \{2, 4, \ldots\}$, $f(i) = 2i$

abcaac $\Gamma = [6]$ $f(1) = f(4) = f(5) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = f(6) = c$
$W = \{a, b, c\}$

$W \subseteq \mathbb{R}$ - c. liczbowy

$|W| < \infty$ - słowo nad alfabetem W

Def Permutacja to ciąg $f: [n] \xrightarrow{1-1} W$

Gdy $W = [n]$, to perm. bazowa (zredukowana)

Np. 6, 2, 9, 4
$\downarrow \downarrow \downarrow \downarrow$
$\boxed{3, 1, 4, 2}$

przenieść na str. 5

Podciąg $\Gamma' \subset \Gamma : z_1 \overset{\Gamma'}{\leq} z_2 \Rightarrow z_1 \overset{\Gamma}{\leq} z_2$, $f_{|\Gamma'}$

Np. abcaac, $\Gamma' = \{2, 4, 5\}$, $f_{|\Gamma'} = baa$

Def Ciąg liczbowy $(x_1, x_2, \ldots)$ jest *rosnący*, gdy $x_1 \leq x_2 \leq \ldots$, a *malejący*, gdy $x_1 \geq x_2 \geq \ldots$

Tw 1 (Erdős, Szekeres, 1935)

Niech $a, b \geq 1$, $n = ab + 1$. Każdy ciąg dług. co najmniej n zawiera podciąg rosnący dł. $a+1$ **lub** podciąg malejący dług. $b+1$

Np $a = b = 3$, $n = 10$ $\quad 3, 2, \overline{1}, 6, \overline{5}, 4, \overline{9}, 8, 7, \overline{10}$

Do dowodu potrzebna będzie

Zas. Szufladkowa (Pigeon-hole Principle)

$|X| \geq n+1$, $X = X_1 \cup \ldots \cup X_n \Rightarrow \exists i : |X_i| \geq 2$

Równoważnie, $f : D \xrightarrow{1-1} W \Rightarrow |D| \leq |W|$.

Zas. szufl. jest szczeg. przypadkiem zas. podz.

Zas. Podziałowa (Dirichlet)

$\forall\, t, m_1, \ldots, m_t \in \mathbb{N}$:

$$|X| \geq \sum_{i=1}^{t} m_i - t + 1,\ X = X_1 \cup \ldots \cup X_t \Rightarrow \exists i: |X_i| \geq m_i$$

(dla $m_1 = \ldots = m_t = 2$ odzyskujemy zas. szufl.)

dowód: niewprost, przyp., że $\forall i: |X_i| \leq m_i - 1$,

wtedy $|X| \leq \sum_{i=1}^{t} |X_i| \leq \sum_{i=1}^{t} m_i - t$ – sprzeczność $\lightning$ $\square$

1. dowód tw E-Sz (two.1)

Dany ciąg $(x_1, \ldots, x_n)$, $n \geq ab+1$. $\forall i = 1, \ldots, n$ niech

l_i^- / l_i^+ = dł. najdł. mal./rosn. podc. o początku w x_i

np. dla 3 2 1 6 5 4 9 8 7 10 $l_4^- = 3$, $l_4^+ = 3$

Przyp., że $\forall i: l_i^+ \leq a$ & $l_i^- \leq b$ (dow. niewprost).

Wtedy $f: [n] \to [a] \times [b]$ dana wzorem $f(i) = (l_i^+, l_i^-)$

spełnia $|W| = ab < n = |D|$, więc (z zas. szufl.) nie

jest różnowart., tzn. $\exists i < j: f(i) = f(j)$. Ale

$x_i \leq x_j \Rightarrow l_i^+ > l_j^+$, $x_i \geq x_j \Rightarrow l_i^- > l_j^-$. $\lightning$ $\square$

$(p \vee q) \equiv (\neg p \Rightarrow q)$

2. dowód tw. E-Sz. (Tw 1)

~~l_i~~ l_i^+ - jak w 1. dow.

Przyp., że $\forall i = 1, \dots, n \quad l_i^+ \leq a$. Spójrzmy na f.

$g : [n] \to [a]$, $g(j) = l_j^+$; niech $X_i = \{ j : g(j) = i \}$,

$X = [n] = X_1 \cup \dots \cup X_a$, $|X| = n \geq ab + 1 = \sum_{i=1}^{a} (b+1) - a + 1$.

Stos. zas. podz. z $t = a$, $m_i = b+1$:

$\exists i : |X_i| \geq b+1$, $X_i \supseteq \{ i_1, \dots, i_{b+1} \}$, $i_1 < \dots < i_{b+1}$

tzn. $l_{i_j}^+ = i$, $j = 1, \dots, b+1$.

Gdyby $\exists k < l : x_{i_k} \leq x_{i_l} \Rightarrow l_{i_k}^+ > l_{i_l}^+$ $\lightning$.

Zatem $x_{i_1} > \dots > x_{i_{b+1}}$ - podc. mal. dł. $b+1$. $\square$

Uwaga 1 Tw 1 jest optymalne, tzn. nie jest prawdą dla $n = ab$ (ćw)

Wn 1 Każdy ciąg liczbowy dług. n zawiera podciąg monotoniczny dł. $\lceil \sqrt{n} \rceil$. (ćw)

Permutacje

Def. $\overleftarrow{x} = (x_k, \dots, x_1)$ naz. permutacją lustrzaną (do) permutacji $x = (x_1, \dots, x_k)$.

Perm. odwrotna do x to x^{-1} taka, że

$$x \circ x^{-1} = id = 123 \dots n$$

Np. $x = 24135 \Rightarrow \overleftarrow{x} = 53142$, $x^{-1} = 31425$

Wn2 (Lemat o 2 perm.) Każde 2 perm. x, y zb. $[n]$ zawierają podpermutacje x', y', $|x'| = |y'| \geq \sqrt{n}$, takie że $x' = y'$ lub $x' = \overleftarrow{y'}$.

dowód Stosujemy Wn.1 do $z = x^{-1} \circ y$. Niech $z' = (z_{i_1}, \dots, z_{i_k})$ będzie monot. podperm. z, $k \geq \sqrt{n}$.
Wtedy

$y = x \circ z$ ma podperm $y' = x(z_{i_1}), \dots, x(z_{i_k})$,

która występuje w x wprost (gdy z' – rosnąca) lub lustrzanie (gdy z' – malejąca) $\square$

$$\begin{array}{l} 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12 \end{array}$$

Ilustracja dowodu: $\underline{x} = (12\ 6\ 7\ 2\ 1\ 3\ 5\ 4\ 8\ 10\ 9\ 11)$

$\lceil\sqrt{12}\rceil = 4$

$\underline{y} = (4\ 5\ 6\ 9\ 8\ 7\ 1\ 2\ 3\ 12\ 11\ 10)$

$\underline{x}^{-1} = (5\ 4\ 6\ 8\ 7\ 2\ 3\ 9\ 11\ 10\ 12\ 1)$

$\underline{z} = \underline{x}^{-1} \circ \underline{y} = (\underline{8}\ \underline{7}\ \bar{2}\ 11\ 9\ \bar{3}\ \underline{\bar{5}}\ \underline{4}\ \bar{6}\ \underline{1}\ 12\ \bar{10})$

$\underline{z}' = (8\ 7\ 5\ 4\ 1)$ – mal., $\underline{y}' = (x_8, x_7, x_5, x_4, x_1)$
$= (4, 5, 1, 2, 12)$

$\underline{z}'' = (2\ 3\ 5\ 6\ 10)$ – rosn. $\underline{y}'' = (6\ 7\ 1\ 3\ 10)$

Tw2 (Lemat o 3 perm.) Spośród 3 dow. perm. zb. $[n]$, któreś 2 zawierają tę samą podperm. dł. $\lceil n^{1/3} \rceil$.

Dowód Weźmy 3 perm. π_1, π_2, π_3 zb. $[n]$.

Zdef. l_i^{12} = dł. najdł. wsp. podc. w π_1 i π_2 zaczynającego się od i, $i = 1, \dots, n$

l_i^{13}, l_i^{23} – analogicznie.

Przyp. niewprost, że $l_i^{st} < n^{1/3}$ $\forall\, 1 \le s < t \le 3\ \forall i$

Rozważmy f. $f: [n] \to \mathbb{R}^3$, $f(i) = (l_i^{12}, l_i^{13}, l_i^{23})$

Zatem $|f([n])| < (n^{1/3})^3 = n \Rightarrow f$ nie jest różnowart.

Ale $\forall\, i < j$, w którejś parze perm. i poprzedza j $\boxed{\text{z Sz.}}$ (lub w obu j poprzedza i). B.s.o. niech i poprzedza j w π_1 i π_2. Wtedy $l_i^{12} > l_j^{12}$, więc $f(i) \neq f(j)$ $\lightning$ $\square$

Ilustr. dowodu: $\pi_1 = 2\ 8\ 9\ 1\ \underline{4}\ \bar{6}\ 7\ 5\ 3$

$\pi_2 = \underline{4}\ \bar{6}\ 7\ 9\ 2\ 3\ 1\ 8\ 5$

$\pi_3 = 9\ 1\ 8\ 2\ 7\ 3\ \bar{6}\ \underline{4}\ 5$

$i=4$, $j=6$, i popr. j w π_1, π_2

$l_4^{12} = 4$ (np. 4675), $l_6^{12} = 3$ (np. 675)

Uwaga Tw 2 jest optymalne (ćw)

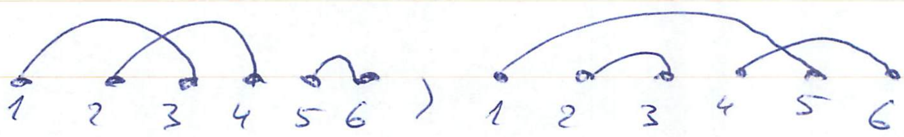
→ 11

SKOJARZENIA (UPORZĄDKOWANE)

V - zb. lin. uporz., $|V| = 2n$

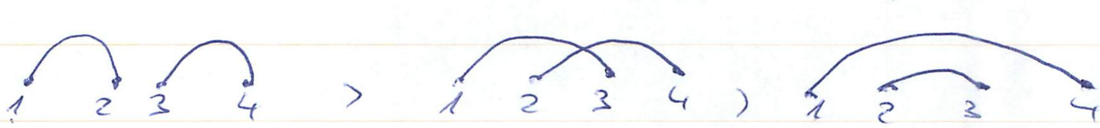
Def Skojarzenie to podział V na n par.

Np. $n=3$, $V=[6]$, 13, 24, 56 lub 15, 23, 46

graficznie 

symbolicznie: A B A B C C   A B B C A C

Ile? $\dfrac{(2n)!}{2^n n!}$, $n=3$: 15
$n=2$: 3



AA BB — linia   ABAB — fala   ABBA — stos

Permutacje losowe

Przestrzeń prob. $\Pi_n = (\Omega_n, P_n)$, gdzie

Ω_n - zb. wsz. $n!$ perm. $[n]$, $P_n \equiv \frac{1}{n!}$

(prawdop. klasyczne)

Zdarzenia: M_k – Π_n zawiera podperm. malej. dł. $\geq k$

R_k – " " " rosn. "

$M_k = M_{\lceil k \rceil}$, $R_k = R_{\lceil k \rceil}$

Obs 1. (a) $\forall k: P(M_k) = P(R_k)$ – bijekcja przez ~~odwrócenie~~ lustrzankę $f(\pi) = \overleftarrow{\pi}$ lub $(n-\pi_1+1, \dots, n-\pi_n+1)$

(b) $P(M_{\lceil \sqrt{n} \rceil}) = P(R_{\lceil \sqrt{n} \rceil}) \geq \frac{1}{2}$ (ćw.)

(c) $\neg M_k \Rightarrow R_{n/k}$. (ćw) $k \in R$, $1 \leq k \leq n$

Tw 4 $\forall c > e$ $P(R_{c\sqrt{n}}) \to 0$ & $P(R_{\frac{\sqrt{n}}{c}}) \to 1$, $n \to \infty$.

Czyli pnp najdł. podp. rosn. $\in [\frac{\sqrt{n}}{c}, c\sqrt{n})$.

Uwaga Logan-Shepp '77, Vershik-Kerov '77

dług. najdł. podp. rosn. $\sim 2\sqrt{n}$

dowód Tw 4 $\forall k$ $X_k = \#$ podp. rosn. dł. k w Π_n

$\mathbb{E}X_k = \binom{n}{k} P($na pozycjach $1,2,\dots,k$ jest podp. rosnąca$)$

Dokładniej: $\forall S \in \binom{[n]}{k}$, $I_S = \begin{cases} 1 & \Pi_n[S] \text{ jest rosn.} \\ 0 & \end{cases}$

$$X_k = \sum_S I_S \Rightarrow \mathbb{E}X_k = \sum_S \mathbb{E}I_S \underset{\uparrow}{=} \binom{n}{k} P(I_{[k]} = 1)$$

symetria!

$$\mathbb{E}X_k = \binom{n}{k} \sum_{T \in \binom{[n]}{k}} P(I_{[k]} = 1, \Pi_n[S] = T)$$

$$= \binom{n}{k}^2 \frac{1 \cdot (n-k)!}{n!} = \frac{\binom{n}{k}}{k!} \leq \frac{n^k}{k!^2} \leq \left(\frac{e^2 n}{k^2}\right)^k \to 0,$$

gdy $k \geq c\sqrt{n}$, $c > e$. Z nier. Markowa,

$$P(X_{\lceil c\sqrt{n}\rceil} \geq 1) \leq \mathbb{E}X_{\lceil c\sqrt{n}\rceil} \to 0.$$

Zauważmy, że $R_{c\sqrt{n}} = \{X_{\lceil c\sqrt{n}\rceil} \geq 1\}$. $\square$

~~Bliźnięta: permutacje $\pi_1 = (x_1, \dots, x_t)$ i~~

~~$\pi_2 = (y_1, \dots, y_t)$ są podobne, gdy $x_i < x_j \Leftrightarrow y_i < y_j$~~
~~$\forall 1 \leq i < j \leq t$~~

~~Bliźnięta w π to 2 rozłączne, podobne podpermutacje.~~