Niech $\mathcal{F}$ spełnia war. z def. $\alpha(x)$.
Wtedy $\mathcal{F}$ jest SS. Rzeczywiście,
dla $A \subsetneq B$ mamy $x_B - x_A = x_{B \setminus A} \geq 1$ ~~sprzeczność~~
czyli w $\mathcal{F}$ nie ma takiej pary zbiorów.
Z 1 w 2, $|\mathcal{F}| \leq m \Rightarrow \alpha(x) \leq m \quad (\forall x)$ $\square$

---

3. Tw. Dilwortha

Zbiór częściowo uporządkowany (z ang. poset)
to para $(X, \leq)$, gdzie X to dow. zbiór,
a „$\leq$" – relacja częściowego porządku.
tzn. zwrotna $(x \leq x)$, antysym. $(x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y)$
i przechodnia $(x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z)$.

Gdy $x \leq y$ lub $y \leq x$, to x, y są
porównywalne.

Dla $Y \subset X$, „$\leq_Y$" – obcięcie (ogran.) „$\leq$" do Y.

Zauważmy, że $\leq_Y$ też jest częśc. porządkiem
więc $(Y, \leq_Y)$ też jest posetem

Y jest łańcuchem w $(X, \leq)$, gdy $\leq_Y$ jest porządkiem liniowym, tzn. $\forall x, y \in Y$ x i y są porównywalne.

Y jest antyłańcuchem w $(X, \leq)$, gdy żadne $x, y \in Y$ nie są porównywalne.

Tw 4 (Dilworth, 1950) W każdym posecie $(X, \leq)$ z $|X| < \infty$, moc największego antyłańcucha jest równa najmniejszej liczbie łańcuchów pokrywających X. [$\leq$ - tryw., trzeba tylko dowieść $\geq$]

dowód (Tverberg 1967) Ind. po $|X|$. ($|X| = 1$ - tryw.)

Zał., że tw. jest prawdz. dla wsz. posetów X', $|X'| < |X|$.

Niech m - moc najw. antył. w X

C - najw. łańcuch w X

I. Jeśli najw. antył. w $X \setminus C$ ma moc $\leq m-1$, to z zał. ind. (stos. do $X \setminus C$), $X \setminus C$ można pokryć $\leq m-1$ łańcuchami. Wraz z C dostajemy pokrycie X $\leq m$ łańcuchami.

II. Niech $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ będzie antył. w $X \setminus C$.

Zdefiniujmy $T = \{x \in X : \exists a \in A : x \geq a\}$

$B = \{x \in X : \exists a \in A : x \leq a\}$

Mamy $X = T \cup B$, bo gdyby $\exists x \in X \setminus (T \cup B)$, (10)
to $A \cup \{x\}$ byłby antył. ↯ (z pmaks.)

Ponadto, $T \cap B = A$, $T \not\ni \min C$, $B \not\ni \max C$ (z def. C).
Zatem $|T|, |B| < |X|$.

Z zał. ind. (stos. do T i B), $\exists\, T = T_1 \cup \ldots \cup T_m$,

$B = B_1 \cup \ldots \cup B_m$, gdzie T_i, B_i są łańcuchami, $i=1,\ldots,m$.
Bso, $a_i \in T_i \cap B_i$, więc $T_i \cup B_i$ to łańcuchy. Wtedy

$X = T \cup B = \bigcup_{i=1}^{m} (T_i \cup B_i)$ jest pokryciem X m łańcuchami.

$\square$