Ciągi Thuego

Repetycja = bliźnięta blokowe stojące obok siebie.

Pr $x = 0001010$

Jak duży alfabet zapewnia istnienie słów dow. dł. bez repetycji?

$|A| = 2 \Rightarrow 010\ldots$ zawsze są rep. dł. 1 lub 2. (gdy $n \geq 4$)

Tw 11 (Thue, 1906) $\exists$ niesk. c. ternarny bez repetycji.

Konstrukcja wykorzystuje ciągi „szachowe"

Zasada remisu (pocz. XX w.): jeśli pojawi się sekwencja ruchów $xYxYx$, x-poz., Y-sekw. (Max Euwe 1929)

Czy istnieją ciągi (bin.) nie zawierające $xYxYx$?

Def. $U_1 = 0$, $U_{n+1} = U_n \overline{U_n}$, $n \geq 1$, $\overline{U_n} = 1_n - U_n$ $\quad 0 \to 1$, $1 \to 0$

$U_1 = 0$, $U_2 = 01$, $U_3 = 0110$, $U_4 = \underbrace{0110}_{U_3}\overbrace{1001}^{\overline{U_3}}$

Równoważnie, U_{n+1} powstaje z U_n przez $0 \to 01$, $1 \to 10$ (ćw)

Obs1 Wyrazy niepar. w U_{n+1} tworzą kopię U_n, a par. – $\overline{U_n}$ (ćw)

Obs2 $\forall$ poz. niepar. następny el. jest inny, tzn. 01 lub 10

niepar.

<u>Def</u> Niesk. ciąg $U = u_1 u_2 \ldots$, gdzie $\forall\, n \geq 1$

$u_1 \cdots u_{2^{n-1}} = U_n$ (def. poprawna, bo rozszerzanie nie niszczy początku)

<u>Lemat 2</u> (Thue, 1912) U nie zawiera bloku $xYxYx$, gdzie Y jest dow. (być może pustym) słowem, a $x \in \{0,1\}$.

<u>dowód</u> Pok. (ind. po n), że $U_n \not\supset xYxYx$

Dla $n \leq 4$ widać, że tak jest. Zał., że $U_n \not\supset xYxYx$.

Przyp. (niewprost), że (b.s.o.) $U_{n+1} \supset 0Y0Y0 := B$

Pokolorujmy (dla wygody) el. na poz. niep. w U_{n+1} na niebiesko, (kopia U_n) a na parz. - na <u>czerwono</u> (kopia $\overline{U_n}$).

<u>Przyp I</u>: $|Y|$ - niepar. $\Rightarrow$ wsz. trzy „0" w B są tego samego koloru (np. <u>nieb</u>)

Niech Y_{nieb} będzie nieb. podsłowem Y. Wtedy bo

$0Y_{nieb}0Y_{nieb}0$ jest blokiem w U_n $\lightning$ (z zał. ind.)

<u>Przyp II</u> $|Y|$ - parz. $\Rightarrow$ (b.s.o.) skrajne „0" w B są <u>nieb</u>, a środkowe „0" - czerw.

<u>Ozn</u> $B = 0x_1 \cdots x_{2k} 0 y_1 \cdots y_{2k} 0$

Z Obs2., po nieb. 0 stoi (czerw.) 1, a po nieb. 1 (czerw.) 0.

„Ping-pong": $0 \; x_1 \; x_2 \cdots x_{2k} \; 0 \; y_1 \; y_2 \cdots y_{2k} \; 0$

① ↑ ② ↑ ⑤ ↑ nieb. 0 ... ③ ↑ ④ ↑

nieb. $\Rightarrow$ cz 1 $\longrightarrow$ nieb. 1 $\Rightarrow$ cz 0

... $\Rightarrow$ x_{2k} nieb. 0, ale na prawo od x_{2k} stoi czerw. 0 ↯

Przypadek, gdy skrajne „0" są czerw., a środk. nieb. jest analog. (ćw) □

<u>Dowód Tw 11</u> Niech $X = \{x_1 < x_2 < \dots\}$ będzie zbiorem pozycji zer w U, tzn. $X = \{1, 4, 6, 7, 10, 11, 13, 16, \dots\}$

Niech $T = t_1 t_2 \dots$, $t_n = x_{n+1} - x_n$, $n \geq 1$

Zatem $T = 3213123\dots$, $t_n \in \{1, 2, 3\}$ (ćw)

Przyp., że w T istnieje repetycja, tzn.

$\exists\, k, m: \; t_{k+i} = t_{k+m+i}, \; i = 0, \dots, m-1$, $k \geq 1$, $m \geq 1$

$t_k \dots t_{k+m-1} \mid t_{k+m} \dots t_{k+2m-1}$

$x_k \; x_{k+1} \dots x_{k+m-1} \; x_{k+m} \; x_{k+m+1} \dots x_{k+2m-1} \; x_{k+2m}$

$0 \; \underbrace{\boxed{1..1 \; 0 \dots 0 \; 1..1}}_{Y} \; 0 \; \underbrace{\boxed{\dots\dots}}_{Y} \; 0 \subset U$ ↯

□

Ilustracja dowodu $k=5,\ m=4,\ x_5=10$

$$t_5\, t_6\, t_7\, t_8 = t_9\, t_{10}\, t_{11}\, t_{12}$$

2	3	1	3	2	3	1	3	
x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}
5	7	10	11	14	16	19	20	23

$\ldots 0 \boxed{1\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,1}\, 0 \boxed{1\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,1}\, 0$

$u_5\, u_6\, u_7\, u_8 \ldots \quad u_{14} \quad u_{23}$

Repetycje w permutacjach

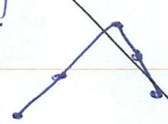
Np. $13\overline{74\,5}862$, takie $137 = 458$

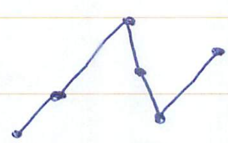
<u>Tw 12</u> (Avgustinovich, Kitaev, Pyatkin, Valyuzhenich '11)

$\forall n\ \exists$ perm. rzędu n bez repetycji dł. ≥ 2.

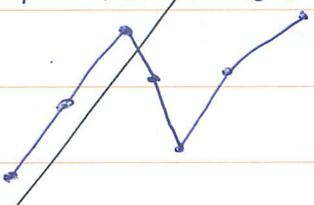
<u>dowód</u> (konstr. iteracyjna)

$n=4$  1243

$n=5$  13542

$n=6$  136425

$n=7$ 1364257



$n=8$