# Struktury Dyskretne: Ściąga na TEST

**Twierdzenie 1** (Erdős-Szekeres)**.** *Niech $n \geq ab+1$. Każdy różnoelementowy ciąg liczbowy dług. $n$ zawiera podciąg rosnący dług. $a+1$ lub podciąg malejący dług. $b+1$.*

**Zasada Podziałowa:** Jeśli $|X| \geq \sum_{i=1}^{t} m_i - t + 1$ oraz $X = X_1 \cup \cdots \cup X_t$, to $\exists i$: $|X_i| \geq m_i$.
Zas. szufladkowa to szczególny przypadek, gdy wszystkie $m_i = 2$.

**Wniosek 1.** *Każdy ciąg liczbowy dług. $n$ zawiera podciag monotoniczny dług. co najmniej $\sqrt{n}$.*

**Wniosek 2.** *Każde dwie permutacje rzędu $n$ zawierają podpermutacje rzedu co najmniej $\sqrt{n}$, które są takie same lub jedna jest odwróceniem drugiej.*

**Twierdzenie 2** (Lemat o 3 permutacjach)**.** *Wśród 3 dowolnych permutacji rzędu $n$ któreś 2 zawierają tę samą podpermutację długości co najmniej $n^{1/3}$.*

**Definicja 1.** Grafy $G$ i $H$ z uporządkowanymi zbiorami wierzchołków $V(G) = \{u_1 < \cdots < u_k\}$ i $V(H) = \{v_1 < \cdots < v_k\}$ są *porządkowo izomorficzne* gdy $\forall 1 \leq i < j \leq k$ mamy $u_i u_j \in E(G)$ wgdy $v_i v_j \in E(H)$. *Skojarzenie uporządkowane* rzędu $n$ to podział zbioru uporządkowanego mocy $2n$ na rozłączne pary (jest to więc graf).

Dwie krawędzie skojarzenia mogą tworzyć *linię* (typ $AABB$) lub *stos* ($ABBA$) lub *falę* ($ABAB$). Skojarzenie, którego każde 2 krawędzie tworzą linię/stos/falę nazywamy *linią/stosem/falą*.

**Twierdzenie 3** (DGR)**.** *Niech $n \geq \ell sw + 1$. Każde skojarzenie rzedu $n$ zawiera linię rzędu $\ell + 1$ lub stos rzędu $s+1$ lub falę rzędu $w+1$.*

*Permutacja losowa* $\Pi_n$ – wylosowana z równym prawdopodobieństwem spośród wszystkich $n!$ permutacji. Zdarzenie $R_k$ – $\Pi_n$ zawiera podciąg rosnący dł. co najmniej $k$.
*Pnp* – prawie na pewno, tzn, z prawdopodobieństwem dążącym do 1, gdy $n \to \infty$.

**Twierdzenie 4** (DGR)**.** *$\forall c > e$, $\mathbb{P}(R_{c\sqrt{n}}) \to 0$ oraz $\mathbb{P}(R_{\sqrt{n}/c}) \to 1$, gdy $n \to \infty$*

*Skojarzenie losowe* $\mathcal{M}_n$ – wylosowane z równym prawdopodobieństwem spośród wszystkich $\frac{(2n)!}{n!2^n}$ skojarzeń rzędu $n$.

**Twierdzenie 5** (DGR)**.** *Pnp największe linie, stosy i fale w $\mathcal{M}_n$ są rzędu $\Theta(\sqrt{n})$.*

**Definicja 2.** Permutacje $\pi_1 = (x_1, \ldots, x_t)$ i $\pi_2 = (y_1, \ldots, y_t)$ są *podobne*, gdy $\forall 1 \leq i < j \leq t$ mamy $x_i < x_j$ wgdy $y_i < y_j$. *Bliźnięta* w permutacji $\pi$ to dwie rozłączne, podobne podpermutacje $\pi$.

$$t(\pi) = \max\{|\pi_1| : \{\pi_1, \pi_2\} \quad \text{bliźnięta w} \quad \pi\}$$

$$t(n) = \min\{t(\pi) : \pi \quad \text{permutacja rzędu} \quad n\}.$$

**Twierdzenie 6** (Gawron)**.** *Pnp $t(\Pi_n) = O(n^{2/3})$. Zatem również $t(n) = O(n^{2/3})$.*

**Definicja 3.** Podsłowa $(x_{i_1}, \dots, x_{i_s})$ i $(x_{j_1}, \dots, x_{j_s})$ słowa $x = (x_1, \dots, x_n)$, gdzie $x_i \in A$, są *rozłączne*, gdy $\{i_1, \dots, i_s\} \cap \{j_1, \dots, j_s\} = \emptyset$.
*Bliźnięta* w słowie to dwa jego rozłączne, identyczne podsłowa.

$$f(x) = \max\{m : x \quad \text{ma bliźnięta długości} \quad m\}$$

$$f(n, A) = \min\{f(x) : x \in A^n\}$$

**Twierdzenie 7** (APP)**.** *Mamy* $f(n; \{0,1\}) \sim n/2$. *Dokładniej,*

$$n - c_1 \left(\frac{\log\log n}{\log n}\right)^{1/4} n \le 2f(n; \{0,1\}) \le n - c_2 \log n.$$

**Definicja 4.** *Repetycje* w słowie to bliźnięta zblokowane w dwóch sąsiednich blokach tego słowa.

**Twierdzenie 8** (Thue, 1906)**.** *Istnieje nieskończony ciąg ternarny bez repetycji.*

**Definicja 5.** Ciąg $U_n$ powstaje przez iterację $U_{n+1} = U_n\overline{U_n}$, $U_1 = 0$, gdzie $\overline{U_n}$ powstaje z $U_n$ przez zamianę 0 na 1 i odwrotnie.
Ciąg $U$ to nieskończony ciąg zawierający wszystkie ciągi $U_n$ jako początkowe segmenty.
Ciąg $X$ to nieskończony ciąg, którego elementami są kolejne pozycje zer w ciągu $U$.
Ciąg $T$ to nieskończony ciąg różnic kolejnych elementów ciągu $X$.

**Lemat 1** (Thue, 1912)**.** *Ciąg $U$ nie zawiera bloków postaci $xYxYx$.*