Struktury Dyskretne

Zestaw Zadań #8

Na: wtorek, 13 grudnia

1. Wywnioskuj Tw. Halla z defektem (Wn. 1) z Tw. Halla.
2. Wywnioskuj poligamiczne Tw. Halla (Wn. 2) z Tw. Halla i przeformułuj je na graf dwudzielny.
3. Niech A będzie macierzą zerojedynkową $n \times n$. Udowodnij, że A zawiera n jedynek takich, że każdy wiersz i kolumna zawiera dokładnie jedną z nich wgdy dla każdego k, każde k wierszy zawiera jedynki w przynajmniej k kolumnach.
4. Niech G będzie grafem 2-dzielnym z dwupodziałem (V_1, V_2) i niech k będzie liczbą naturalną. Załóżmy, że każdy wierzchołek z V_1 ma stopień co najmniej k, a każdy wierzchołek z V_2 ma stopień co najwyżej k. Pokaż, że G ma skojarzenie nasycające V_1. Wywnioskuj z tego, że każdy 2-dzielny graf regularny zawiera skojarzenie doskonałe (nasycające V_1 i V_2).
5. Niech k będzie liczbą naturalną. Pokazać, że każde 2 podziały skończonego zbioru (mocy podzielnej przez k) na k-elementowe podzbiory mają wspólny SRR.
6. Niech G będzie grafem 2-dzielnym z podziałem (V_1, V_2) i niech A będzie zbiorem wszystkich wierzchołków maksymalnego stopnia.
   (a) Pokaż, że istnieje skojarzenie nasycające $A \cap V_1$.
   (b) Wywnioskuj z części (a) i Zad. 4, że G zawiera skojarzenie nasycające A.
7. *Prostokątem łacińskim wymiarów $r \times s$ z alfabetem $[n]$* nazywamy macierz A wymiarów $r \times s$, taką że każdy jej element należy do $[n]$ i że każde $j \in [n]$ występuje w każdym wierszu i kolumnie co najwyżej raz. Pokaż, że każdy prostokąt łaciński wymiarów $r \times n$ można roszerzyć do kwadratu łacińskiego wymiarów $n \times n$ (tzn. dopisując tylko $n - r$ nowych wierszy.)