Struktury Dyskretne

Zestaw Zadań #6

Na: wtorek, 29 listopada

1. Pokaż, że $f(n, \{0, 1\}) \geqslant \lfloor n/3 \rfloor$. Następnie pokaż, że $f(n, A) \geqslant \lfloor n/(a + 1) \rfloor$, gdzie $|A| = a$.

2. Powielając dowód Faktu 1, pokazać, że $2f(n, \{0, 1\}) \leqslant n - (k - 1)$, gdzie $(3^k - 1)/2 < n \leqslant (3^{k+1} - 1)/2$.

3. W ciągu binarnym

   $$0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0$$

   znajdź nadłuższą parę bliźniąt oraz najdłuższą repetycję.

4. Pokaż, że ciąg U_{n+1}, zdefiniowany na wykładzie przez iterację $U_{n+1} = U_n\overline{U_n}$, powstaje z U_n przez podstawienie $0 \to 01$, $1 \to 10$. Wskaz.: udowodnić indukcynie, że $U_n = W_n$, gdzie $W_1 = 0$, a dla każdego $n \geqslant 1$ W_{n+1} powstaje z W_n przez powyższe podstawienie.

5. Pokaż, że wyrazy na pozycjach nieparzystych tworzą w U_{n+1} kopię U_n, a na parzystych – kopię $\overline{U_n}$.

6. Dokończyć dowód Lematu 2, analizując przypadek, gdy skrajne zera w B są czerwone (a środkowe jest niebieskie).

7. W dowodzie Tw. 11 wyjaśnić dlaczego $t_n \in \{1, 2, 3\}$ dla każdego $n \geqslant 1$.

8. (Dla chętnych) Rozważ ciąg Pera Noergårda: $N_0 = 0$, a dla każdego $n \geqslant 0$, $N_{2n+1} = N_n + 1$ oraz $N_{2n} = -N_n$.

   - Pokaż, że ciągi $U = (u_1, u_2, \ldots, ...)$ i $(N'_0, N'_1, \ldots)$, gdzie $N'_n = N_n (\mod 2)$, są identyczne, tzn., $u_n = N'_{n-1}$, $n \geqslant 1$.
   - Poczytaj o duńskim kompozytorze Perze Noergårdzie i o roli ciągu $(N_0, N_1, \ldots)$ w jego muzyce.