Struktury Dyskretne

Zestaw Zadan #4

Na: wtorek, 15 listopada

1. Dla $r \geqslant 2$, *r-krotne bliźnięta* w permutacji π to każda rodzina r rozłącznych i wzajemnie podobnych podpermutacji π. Niech $t_r(n)$ bedzie rozmiarem największych r-krotnych bliźniąt w π, przy czym rozmiar to długość jednego z bliźniąt.

   (a) Wyznaczyć $t_3(\pi)$ dla permutacji $\pi = (14, 2, 1, 3, 18, 6, 10, 5, 4, 8, 15, 7, 17, 11, 13, 12, 9, 16)$.

   (b) Uogólnić Tw 5 (Gawron), pokazując, że *pnp* $t_r(\Pi_n) = O\left(n^{r/(2r-1)}\right)$.

2. Dokończyć dowód Tw. 6 dla stosów, przyjmując $\epsilon = 1/50$ i $c = 2$. Tzn., zakładając, że $|\mathcal{M}'_n| \geqslant 0,49n$ oraz że $\mathcal{M}_n$ nie zawiera fal mocy $k_0 = \lceil 2\sqrt{n} \rceil$ pokazać, że $\mathcal{M}_n$ zawiera stos mocy co najmniej $\sqrt{n}/5$.

3. Niech $X = |\mathcal{M}'_n|$. Pokazać, że

$$\frac{E(X(X-1))}{(EX)^2} - 1 = O(1/n).$$

4. *Skojarzeniem trójkowym rzędu* n nazywamy dowolny podział zboioru $[3n]$ na n rozłącznych 3-elementowych podzbiorów, których kolejnosc nie jest ważna.

   (a) Ile jest skojarzeń trójkowych rzędu n? Wymień wszystkie rzędu 2 (wygodnie jest użyc notacji literowej: 3 litery A i 3 litery B).

   (b) *Linią* w skojarzeniu trójkowym nazywamy każdy jego podzbiór trójek $t_1, \ldots, t_k$ taki, że dla każdego $i = 1, \ldots, k-1$, prawy element trójki t_i poprzedza (jest na lewo) lewy element trójki t_{i+1}. Pokaż, że pnp wielkośc największej linii w losowym skojarzeniu trójkowym jest $O(n^{1/3})$.

5. Wykazać, że $|\mathcal{A}_n| = |\bar{\mathcal{A}}_n|$ (notacja z wykładu) i zilustrować dla $n = 4$ i $n = 5$.

6. Dla $n = 4$ i $n = 5$ przeliczyć permutacje wszystkich kształtów. Który kształt jest najliczniejszy?