Struktury Dyskretne

Zestaw Zadan #3

Na: wtorek, 8 listopada

1. Udowodnij, że $P(M_{\sqrt{n}}) = P(R_{\sqrt{n}}) \geqslant \frac{1}{2}$.
2. Udowodnij, że dla każdego $1 \leqslant k \leqslant n$, zdarzenie $\neg M_k$ implikuje zdarzenie $R_{n/k}$.
3. Wyznacz $t(\pi)$, gdzie $\pi = (649135728)$, oraz $t(4)$ i $t(5)$.
4. Udowodnij, że dla każdego całkowitego $k \geqslant 1$ zachodzi nierówność $k! > (k/e)^k$.
5. Bliżnięta w permutacji π nazywamy *blokowymi*, gdy oba podciągi są segmentami π (tzn. składają sie z kolejnych elementów). Pokaż, że każda permutacja rzędu $n = k(k! + 1)$ zawiera bliźnięta blokowe mocy k. Wyraź k (asymptotycznie) jako funkcję n.
6. Bliżnięta w permutacji π nazywamy *ciasnymi*, gdy razem tworzą segment π. Pokaż, że każda permutacja rzędu $n \geqslant 6$ zawiera ciasne bliźnięta mocy 2.
7. Dla $r \geqslant 2$, *r-krotne bliźnięta* w permutacji π to każda rodzina r rozłącznych i wzajemnie podobnych podpermutacji π. Niech $t_r(n)$ bedzie rozmiarem największych r-krotnych bliźniąt w π, przy czym rozmiar to długość jednego z bliźniąt.
   (a) Wyznaczyć $t_3(\pi)$ dla permutacji $\pi = (14, 2, 1, 3, 18, 6, 10, 5, 4, 8, 15, 7, 17, 11, 13, 12, 9, 16)$.
   (b) Uogólnić Tw 5 (Gawron), pokazując, że *pnp* $t_r(\Pi_n) = O\left(n^{r/(2r-1)}\right)$.