

Struktury Dyskretne

Zestaw Zadan #2

Na: wtorek, 25 października

1. Niech $V = [4]$. (a) Narysuj wszystkie grafy o zbiorze wierzchołków V , z których żadne 2 nie są izomorficzne. Następnie, przelicz wszystkie grafy na V , z których żadne 2 nie są *porządkowo*-izomorficzne. Wyciągnij konkluzję.
2. Rozważ grafy G , gdzie $V(G) = [4]$, $E(G) = \{12, 23, 24, 34\}$ i H , gdzie $V(H) = \{a, b, c\}$, $E(H) = \{ab, bc\}$. Przelicz, (a) ile podgrafów grafu G jest izomorficznych z grafem H oraz (b) ile podgrafów grafu G jest porządkowo-izomorficznych z grafem H , zakładając, że zbiór $V(G)$ jest uporządkowany naturalnie ($1 < 2 < 3 < 4$), a zbiór $V(H)$ jest ($a < b < c$), uporządkowany alfabetycznie.
3. Narysuj wszystkie 15 różnych skojarzeń uporządkowanych zbioru $[6]$.
4. Podaj przykład skojarzenia zbioru $[2n]$, gdzie $n = \ell sw$, które nie zawiera linii mocy $\ell + 1$, stosu mocy $s + 1$, ani fali mocy $w + 1$. (Zaczynij od przypadku $\ell = s = w = 2$, później spróbuj uogólnić.)
5. Wywnioskować z Tw. 3, że każde skojarzenie zbioru $[2n]$ zawiera linię, stos lub falę mocy $\lceil n^{1/3} \rceil$.
6. Rozłóż poniższy krajobraz na rozłączne fale tak, jak w dowodzie Tw. 3.

ABCDEFBHGHC DIJEFKGHILJKL

7. Wywnioskuj z Tw. 1 (ESz), że każde skojarzenie M mocy $n = ks + 1$ zawiera stos dł. $s + 1$ lub krajobraz dł. $k + 1$. Wskaz.: Przyporządkuj prawym końcom krawędzi w M permutację n -elementową.
8. Opisz i przelicz skojarzenia zbioru $[2n]$, w których żadne 2 pary nie są typu $AABB$, tzn. nie tworzą linii.
9. (Dla chętnych) Na wykładzie zdefiniowaliśmy *krajobraz* jako skojarzenie bez pary krawędzi typu $ABBA$, tzn. bez stosów. Teraz zdefiniujemy *pejzaz* jako skojarzenie bez pary krawędzi typu $ABAB$, tzn. bez fal. Pokazać, że na $[2n]$ (a) jest tyle samo krajobrazów co pejzaży oraz (b) że ich liczba jest liczbą Catalana

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

Wskaz.: Wskazać bijekcję pomiędzy pejzażami a krajobrazami oraz bijekcję pomiędzy pejzażami a (n, n) -ciągami *zdominowanymi* (patrz np. *Wykłady z Kombinatoryki*, Palka, Ruciński, str. 58-60)