Struktury Dyskretne

Zestaw Zadań #11

Na: wtorek, 10 stycznia

1. Dany jest hipergraf $H = (V, E)$, gdzie $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, a
$$E = \{\{a, b, c\}, \{a, d\}, \{e, f\}, \{c, g, h\}, \{d, g, h\}, \{g, h\}\}.$$
Oblicz $\tau(H)$ i $\nu(H)$. Wskaz: narysuj ten hipergraf. Uwaga: to nie jest hipergraf jednolity.

2. Wyjaśnij dlaczego dla każdego r-jednolitego hipergrafu H, $r \geqslant 1$,
$$\nu(H) \leqslant \tau(H) \leqslant r\nu(H).$$

3. Niech $K_5^{(3)}$ będzie 3-jednolitym hipergrafem pełnym na 5 wierzacholkach, tzn. o $\binom{5}{3} = 10$ krawędziach. Wyznacz $\nu(K_5^{(3)})$ and $\tau(K_5^{(3)})$. To samo dla analogicznie zdefiniowanych $K_n^{(r)}$, $n > r > 1$.

4. Analizując 3-jednolity hipergraf zwany płaszczyzną Fano (za krawedzie bierze się proste) oraz jego pod-hipergraf otrzymany przez wyrzucenie jednego wierzchołka, wykaż, odpowiednio, że (a) Hipoteza Rysera dla $r = 3$ nie jest prawdziwa dla nietrójdzielnych hipergrafów oraz (b) dla trójdzielnych hipergrafów nierówności $\tau(H) \leqslant 2\nu(H)$ nie da się, w ogólności, polepszyć.

5. Niech $f(r)$ będzie najmniejszą liczbą krawędzi w r-jednolitym, r-dzielnym grafie, dla którego $\nu(H) = 1$ i $\tau(H) \geqslant r - 1$. Udowodnij, że (a) $f(r) \geqslant 2r - 3$, (b) $f(4) = 6$. Wskaz.: (a) ponieważ $\nu = 1$, każde 2 krawędzie można pokryć 1 wierzchołkiem (nie trzeba korzystać z założenia, że H jest r-dzielny) (b) skoro $\tau \geqslant 3$, to każdy zbiór 4-podzialu musi mieć co najmniej 3 wierzchołki; gdyby miało być tylko 5 krawędzi, to żaden wierzchołek nie może mieć stopnia 3 lub więcej.

6. (a) Znajdź dwie istotnie różne (tzn. nieizomorficzne) największe rodziny przecinające się złożone z podzbiorów (dowolnej mocy) zbioru $X = \{1, \ldots, 4\}$. To samo dla $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
(b) Znajdź dwie istotnie różne największe rodziny przecinające się złożone z 3-elementowych podzbiorów zbioru $X = \{1, \ldots, 6\}$. Czy da się to zrobić dla $X = \{1, \ldots, 7\}$?

7. Jeśli $r \leqslant n/2$ oraz rodzina $\mathcal{F} \subset \bigcup_{k=1}^{r} \binom{X}{k}$ jest przecinającym się systemem Spernera, to $|\mathcal{F}| \leqslant \binom{n-1}{r-1}$. Wskaz.: wykorzystaj skojarzenia w kracie boolowskiej między poszczególnymi poziomami (tak jak w dowodzie Tw. Spernera).

8. (i) Wykaż, że dla $n \geqslant 2r + 1$ każda rodzina $\mathcal{F}_x^{(r)} = \{F \in \mathcal{F} : \ |F| = r, \ F \ni x\}$, gdzie $x \in [n]$, jest maksymalną rodziną przecinającą się (tzn. dodanie nowego zbioru psuje tę własność – inaczej, dla każdego $F \notin \mathcal{F}$, rodzina $\mathcal{F} \cup \{F\}$ nie jest przecinająca się).
(ii) Korzystając z (i), wywnioskuj część (a) Tw. Erdősa-Ko-Rado z części (b).

9. Wykaż, że każda permutacja „cykliczna" zawiera co najwyżej r zbiorów z danej r-jednolitej rodziny przecinającej się.

10. Zrób pierwsze krok w dowodzie części (b) Tw. Erdősa-Ko-Rado i wykaż, że jeśli r-jednolita rodzina przecinająca się $\mathcal{F}$ ma moc równą $\binom{n-1}{r-1}$, to każda permutacja „cykliczna" σ zawiera dokładnie r zbiorów rodziny $\mathcal{F}$. Skorzystaj z poprzedniego zadania.

11. Wyznacz $m^{(3)}(10, 3)$ i narysuj 3-jednolity hipergraf osiągający to maksimum.

12. Nawiązując do tw. Edrősa-Gallai'a, dla danego $s \geqslant 2$, określ dla jakich $n \geqslant 2s$ mamy $m^{(2)}(n, s) = \binom{2s-1}{2}$, a dla jakich $m^{(2)}(n, s) = \binom{n}{2} - \binom{n-s+1}{2}$.

13. Udowodnij tw. Erdősa-Gallai'a dla $n = 2s$. Wskaz.: rozbij graf pełny K_n na sumę rozłącznych skojarzeń doskonałych.