Struktury Dyskretne

Zestaw Zadań #10

Na: wtorek, 3 stycznia

1. Przypominam oznaczenie z wykładu:

$$\alpha(x_1, \ldots, x_n) = \max_{\mathcal{F} \subset 2^{[n]}} \{|\mathcal{F}| : \ \forall A, B \in \mathcal{F} : \ |x_A - x_B| < 1\},$$

   gdzie $x_A = \sum_{i \in A} x_i$. Pokazać, że $\alpha(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = \alpha(x_1, \ldots, -x_i, \ldots, x_n)$.

2. Wyznaczyć $\alpha(1, 3/2, -5/2, -2, 3)$.

3. W nawiązaniu do dowodu Tveberga Tw. Dilwortha, pokazać, że $T \cap B = A$.

4. Udowodnić Dualne Tw. Dilwortha: W każdym skończonym posecie X moc największego łańcucha równa się minimalnej liczbie antyłańcuchów pokrywających X.

   Wskaz.: użyc funkcji $r : X \to \mathbf{N}_0$ danej wzorem

$$r(x) = \max\{|L| - 1 : \quad L \in \mathcal{L}_x\},$$

   gdzie $\mathcal{L}_x$ jest zbiorem łańcuchów o największym elemencie x.

5. Narysuj diagram Hassego posetu liczb naturalnych od 1 do 10 z relacją podzielności. Wyznacz moc największego łancucha, największego antyłańcucha, najmniejszego pokrycia łańcuchami i najmniejszego pokrycia antyłańcuchami. Zweryfikuj Tw. Dilwortha i Dualne Tw. Dilwortha.

6. Udowodnić Lemat Dilwortha: Dla dowolnych liczb naturalnych a, b, każdy poset X rzędu $|X| \geqslant ab + 1$ zawiera albo łańcuch mocy $a + 1$ albo antyłańcuch mocy $b + 1$.

7. Wywnioskuj tw. Erdősa-Szekeresa z Lematu Dilworta.