Struktury Dyskretne: Ściąga na TEST

Twierdzenie 1 (Erdős-Szekeres)**.** *Niech $n \geq ab + 1$. Każdy ciąg liczbowy dług. n zawiera podciąg rosnący dług. $a + 1$ lub podciąg malejący dług. $b + 1$.*

Zasada Podziałowa: Jeśli $|X| \geq \sum_{i=1}^{t} |X_i|$ oraz $X = X_1 \cup \cdots \cup X_t$, to $\exists i$: $|X_i| \geq 2$. Zas. szufladkowa to szczególny przypadek, gdy wszystkie $m_i = 2$.

Wniosek 1. *Każde dwie permutacje rzędu n zawierają podpermutacje rzedu co najmniej $\sqrt{n}$, które są takie same lub jedna jest odwróceniem drugiej.*

Twierdzenie 2 (Lemat o 3 permutacjach)**.** *Wśród 3 dowolnych permutacji rzędu n któreś 2 zawierają tę samą podpermutację długości co najmniej $n^{1/3}$.*

Definicja 1. Grafy G i H z uporządkowanymi zbiorami wierzchołków $V(G) = \{u_1 < \cdots < u_k\}$ i $V(H) = \{v_1 < \cdots < v_k\}$ są *porządkowo izomorficzne* gdy $\forall 1 \leq i < j \leq k$ mamy $u_i u_j \in E(G)$ wgdy $v_i v_j \in E(H)$. *Skojarzenie uporządkowane* rzędu n to podział zbioru uporządkowanego mocy $2n$ na rozłączne pary (jest to więc graf).

Dwie krawędzie skojarzenia mogą tworzyć *linię* (typ $AABB$) lub *stos* ($ABBA$) lub *falę* ($ABAB$). Skojarzenie, którego każde 2 krawędzie tworzą linię/stos/falę nazywamy *linią/stosem/falą*.

Twierdzenie 3 (DGR)**.** *Niech $n \geq \ell s w + 1$. Każde skojarzenie rzedu n zawiera linię rzędu $\ell + 1$ lub stos rzędu $s + 1$ lub falę rzędu $w + 1$.*

Permutacja losowa Π_n – wylosowana z równym prawdopodobieństwem spośród wszystkich $n!$ permutacji. Zdarzenie R_k – Π_n zawiera podciąg rosnący dł. co najmniej k.

Pnp – prawie na pewno, tzn, z prawdopodobieństwem dążącym do 1, gdy $n \to \infty$.

Twierdzenie 4 (DGR)**.** *$\forall c > e$, $\mathbb{P}(R_{c\sqrt{n}}) \to 0$ oraz $\mathbb{P}(R_{\sqrt{n}/c}) \to 1$, gdy $n \to \infty$*

Definicja 2. Permutacje $\pi_1 = (x_1, \ldots, x_t)$ i $\pi_2 = (y_1, \ldots, y_t)$ są *podobne*, gdy $\forall 1 \leq i < j \leq t$ mamy $x_i < x_j$ wgdy $y_i < y_j$. *Bliźnięta* w permutacji π to dwie rozłączne, podobne podpermutacje π.

$$t(\pi) = \max\{|\pi_1| : \{\pi_1, \pi_2\} \quad \text{bliźnięta w} \quad \pi\}$$

$$t(n) = \min\{t(\pi) : \pi \quad \text{permutacja rzędu} \quad n\}.$$

Twierdzenie 5 (Gawron)**.** *Pnp $t(\Pi_n) = O(n^{2/3})$. Zatem również $t(n) = O(n^{2/3})$.*

Skojarzenie losowe $\mathcal{M}_n$ – wylosowane z równym prawdopodobieństwem spośród wszystkich $\frac{(2n)!}{n!2^n}$ skojarzeń rzędu n.

Twierdzenie 6 (DGR)**.** *Pnp największe linie, stosy i fale w $\mathcal{M}_n$ są rzędu $\Theta(\sqrt{n})$.*

Definicja 3. *Kształt* permutacji $\pi_1 = (x_1, \ldots, x_n)$ to ciąg binarny $s(\pi) = (s_1, \ldots, s_{n-1})$, $s_i \in \{+, -\}$, przy czym $s_i = +$ wgdy $x_i < x_{i+1}$.
Bliźnięta 2-jajowe (słabe) w permutacji π to dwie rozłączne podpermutacje π_1 i π_2 takie, że

$s(\pi_1) = s(\pi_2)$.
Permutacja π jest *naprzemienna*, gdy $s(\pi) = (+, -, +, -, \dots)$ lub $s(\pi) = (-, +, -, +, \dots)$.

$$wt(\pi) = \max\{|\pi_1| : \{\pi_1, \pi_2\} \quad \text{bliźnięta 2-jajowe w} \quad \pi\}$$

$$wt(n) = \min\{wt(\pi) : \pi \quad \text{permutacja rzędu} \quad n\}.$$

Twierdzenie 7 (André, 1879). *Niech A_n będzie połową liczby permutacji naprzemiennych (tylko $s(\pi) = (+, -, +, -, \dots)$ lub tylko $s(\pi) = (-, +, -, +, \dots)$). Wtedy, dla $n \geq 2$*

$$A_{n+1} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A_k A_{n-k}$$

(przyjmujemy $A_0 = A_1 = 1$).

Definicja 4. $la(\pi)$ – długość najdłuższej podpermutacji naprzemiennej w π;
$e(\pi)$ – liczba p. ekstremalnych w π.
Uwaga: π_1 i π_n są zawsze ekstremalne (min lub max).

Lemat 1. $e(\pi) = la(\pi)$

Twierdzenie 8 (Stanley). $\mathbb{E}(la(\Pi_n)) \sim \frac{2}{3}n$

Twierdzenie 9 (DGR). *Pnp* $wt(\Pi_n) \geq \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{60} + o(1)\right) n$

Definicja 5. Podsłowa $(x_{i_1}, \dots, x_{i_s})$ i $(x_{j_1}, \dots, x_{j_s})$ słowa $x = (x_1, \dots, x_n)$, gdzie $x_i \in A$, są *rozłączne*, gdy $\{i_1, \dots, i_s\} \cap \{j_1, \dots, j_s\} = \emptyset$.
Bliźnięta w słowie to dwa jego rozłączne, identyczne podsłowa.

$$f(x) = \max\{m : x \quad \text{ma bliźnięta długości} \quad m\}$$

$$f(n, A) = \min\{f(x) : x \in A^n\}$$

Twierdzenie 10 (APP). *Mamy $f(n; \{0,1\}) \sim n/2$. Dokładniej,*

$$n - c_1 \left(\frac{\log\log n}{\log n}\right)^{1/4} n \leq 2f(n; \{0,1\}) \leq n - c_2 \log n.$$

Definicja 6. *Repetycje* w słowie to bliźnięta zblokowane w dwóch sąsiednich blokach tego słowa.

Twierdzenie 11 (Thue, 1906). *Istnieje nieskończony ciąg ternarny bez repetycji.*

Definicja 7. Ciąg U_n powstaje przez iterację $U_{n+1} = U_n\overline{U_n}$, $U_1 = 0$, gdzie $\overline{U_n}$ powstaje z U_n przez zamianę 0 na 1 i odwrotnie.
Ciąg U to nieskończony ciąg zawierający wszystkie ciągi U_n jako początkowe segmenty.
Ciąg X to nieskończony ciąg, którego elementami są kolejne pozycje zer w ciągu U.
Ciąg T to nieskończony ciąg różnic kolejnych elementów ciągu X.

Lemat 2 (Thue, 1912). *Ciąg U nie zawiera bloków postaci $xYxYx$.*

Definicja 8. *Repetycje* w permutacji to nietrywialne bliźnięta zblokowane w dwóch sąsiednich blokach tej permutacji. *Repetycje 2-jajowe (słabe)* w permutacji to nietrywialne bliźnięta 2-jajowe (słabe) zblokowane w dwóch sąsiednich blokach tej permutacji.
Przez *trywialne* rozumiemy bliźnięta długości 1.

Twierdzenie 12 (Avgustinovich et al.). *$\forall n$ istnieje permutacja rzędu n bez repetycji.*