Struktury Dyskretne: Ściąga na TEST 2

Teoria Ramseya

Notacja:
$n \to (\ell_1, \ldots, \ell_r)^k$, gdy $\forall \binom{[n]}{k} = X_1 \cup \cdots \cup X_r \; \exists i \in [r], \exists T \subseteq [n] : \; |T| = \ell_i$ and $\binom{T}{k} \subseteq X_i$. Gdy $\ell_1 = \cdots = \ell_r := \ell$, to piszemy $n \to (\ell)^k_r$; gdy $r = 2$ lub $k = 2$, to ten indeks opuszczamy.

Twierdzenie 1 (Przyjęcie na 6 osób)**.** *Wśród dowolnych 6 osób zawsze są trzy, które znają się nawzajem lub trzy, które nie znają się nawzajem. Inaczej,* $6 \to (3)$.

Twierdzenie 2 (Twierdzenie Ramseya dla par ($k = 2$), 1930)**.** $\forall r, \ell_1, \ldots, \ell_r \; \exists n :$
$n \to (\ell_1, \ldots, \ell_r)$. *Dla* $r = 2$*, równoważnie, w języku teorii grafów:*
$\forall a, b \; \exists n : \; \forall G, |V(G)| = n : \; G \supset K_a$ *lub* $G^c \supset K_b$.

Twierdzenie 3 (Goodman, 1956)**.** $\forall n \geq 6$, $\forall G, |V(G)| = n$, *łączna liczba trójkątów* t_{GG^c} *w* G *i w* G^c *jest nie mniejsza niż* $\frac{1}{24}n(n-1)(n-5)$.

Notacja: $G \to (H_1, \ldots, H_r)$, gdy $\forall \chi : E(G) \to [r] \; \exists i \in [r] \; \exists H \subset G, \; H \equiv H_i : \; \chi(E(H)) = \{i\}$. Stosujemy skróty jak dla wczesniejszej notacji. Wiemy, że $K_6 \to (K_3)$.

Problem 1 (Erdős, Hajnal, 1967)**.** *Czy istnieje* G *taki, że* $G \not\supset K_6$*, ale* $G \to (K_3)$*?*

Rozwiązanie (Graham, 1968): Tak, np. $K_8 - C_5$ (tzn. z K_8 usuwamy krawedzie dowolnego pięciokąta).

Definicja 1 (Liczby Ramseya)**.** $R_k(\ell_1, \ldots, \ell_r) = \min\{n : \; n \to (\ell_1, \ldots, \ell_r)^k\}$

$R_1(\ell_1, \ldots, \ell_r) = \ell_1 + \cdots + \ell_r - r + 1$, $R(\ell, 2) = \ell$, $R(3) = 6$,

$$R(\ell_1, \ell_2) \leq R(\ell_1 - 1, \ell_2) + \mathbb{R}(\ell_a, \ell_2 - 1) \quad [-1 \quad \text{gdy oba składniki są parzyste}].$$

$R(3, 4) = 9, R(3, 5) = 14, R(4) = 18.$

$R(k, \ell) \leq \binom{k+\ell-2}{k-1}$, a stąd, $R(k) \leq \binom{2k-2}{k-1} = O(4^k/\sqrt{k})$
(Tutaj k ma inne znaczenie niż poprzednio!)

Twierdzenie 4 (Erdős,1947 (metoda probabilistyczna))**.** $R(k) = \Omega(k2^{k/2})$

Definicja 2 (Grafowe liczby Ramseya)**.** $R(H_1, \ldots, H_r) = \min\{n : \; K_n \to (H_1, \ldots, H_r)\}$

Twierdzenie 5 (Burr, Erdős, Spencer, 1975)**.** *Dla każdego* $n \geq 2$*,* $R(nK_3) = 5n$.

Twierdzenie 6 (Schur, 1916)**.** $\forall r \geq 2 \; \exists s \; \forall \chi : [s] \to [r] \; \exists x, y, z \in [s] :$
$\chi(x) = \chi(y) = \chi(z)$ *oraz* $x + y = z$.

Definicja 3 (Liczby Schura)**.** $s(r) = \min\{s : \; s \quad$ *spełnia Tw. Schura*$\}$

Dla $k \geq 2$, przez AP_k oznaczamy ciąg arytmetyczny długości k.

Twierdzenie 7 (Van der Waerden, 1927)**.**

$$\forall r \geq 2, k \geq 3\ \exists n\ \forall \chi : [n] \to [r]\ \exists \quad \textit{monochromatyczny}\ \ AP_k.$$

Definicja 4 (Liczby Van der Waerdena)**.**

$$W(k,r) = \min\{n :\ n \quad \textit{spełnia Tw. Van der Waerdena}\}$$

Wiemy, że $W(3,2) = 9$ a $W(3,3) = 27$.

Definicja 5 (Równania regularne)**.** Równanie $c_1x_1 + \cdots + c_kx_k = 0$, $c_i \in \mathbb{Z}$, jest *regularne w* $\mathbb{N}$, gdy $\forall r \geq 2\ \forall \chi : \mathbb{N} \to [r]\ \exists$ monochromatyczne rozwiazanie.

Twierdzenie 8 (Rado, 1943)**.** *Równanie $c_1x_1 + \cdots + c_kx_k = 0$, $c_i \in \mathbb{Z}$, jest regularne w $\mathbb{N}$ wgdy ma nietrywialne rozwiązanie zero-jedynkowe, tzn. $\exists \emptyset \neq I \subset [k] :\ \sum_{i \in I} c_i = 0$.*

Definicja 6 (n-kostka i linia)**.** Dany jest zbiór uporządkowany liniowo A (alfabet), $|A| = t$, możemy przyjąć, że $A = \{0, 1, \ldots, t-1\}$. Dla $n \geq 1$, *n-kostką nad A* nazywamy zbiór $C_t^n = \{(x_1, \ldots, x_n) :\ x_i \in A\}$.
Linia w C_t^n to zbiór $L = \{p_0 \ldots, p_{t-1}\}$, $p_i = (x_{k,1}, \ldots, x_{k,n}) \in C_t^n$, dla którego istnieje podział $[n] = R \cup S$, $R \neq \emptyset$, oraz stałe c_ℓ dla $\ell \in S$ takie, że dla każdego $k = 0, \ldots, t-1$

$$x_{k,\ell} = \begin{cases} c_\ell & \text{gdy} \quad \ell \in S \\ k & \text{gdy} \quad \ell \in R \end{cases} .$$

Twierdzenie 9 (Hales, Jewett, 1963)**.**

$$\forall r, t\ \exists n :\ \forall \chi : C_t^n \to [r]\ \exists \quad \textit{monochromatyczna linia.}$$

Obserwacja: Jeśli n spełnia Tw. Halesa-Jewetta, to t^n spełnia Tw. Van der Waerdena.