Struktury Dyskretne: Ściąga na TEST 2

Ekstremalna Teoria Zbiorów

Definicja 1. Systemem różnych reprezentantów (SRR) rodziny zbiorów $\mathcal{F} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ nazywamy każdy *różnowartościowy* ciąg $(x_1, \ldots, x_m)$ taki, że $x_i \in A_i$, $i = 1, \ldots, m$.

Twierdzenie 1 (Twierdzenie o małżeństwach, Hall, 1935)**.** *Rodzina* $\mathcal{F} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ *ma SRR wgdy spełnia warunek Halla:*

$$\forall S \subseteq [m] : \ |\bigcup_{i \in S} A_i| \geq |S|.$$

Wniosek 1 (Tw. Halla z defektem)**.** *Dane są liczba całkowita* $d \geq 0$ *i rodzina zbiorów* $\{A_1, \ldots, A_m\}$*. Istnieje SRR dla wszystkich oprócz co najwyżej* d *zbiorów tej rodziny wgdy*

$$\forall S \subseteq [m] : \ |\bigcup_{i \in S} A_i| \geq |S| - d.$$

Wniosek 2 (Poligamiczne tw. Halla)**.** *Dane są liczby naturalne* $d_1, \ldots, d_m$ *i rodzina zbiorów* $\{A_1, \ldots, A_m\}$*. Istnieją rozłączne podbiory* $D_i \subseteq A_i$*,* $|D_i| = d_i$*,* $i = 1, \ldots, m$*, wgdy*

$$\forall S \subseteq [m] : \ |\bigcup_{i \in S} A_i| \geq \sum_{i \in S} d_i.$$

Wersja grafowa Tw. Halla: Graf dwudzielny $G = (V, E)$, $V = V_1 \cup V_2$, sąsiedztwo wierzchołka v w G to $N(v) = \{u \in V : uv \in E\}$. Dla każdego $S \subset V_1$: $N(S) = \bigcup_{v \in S} N(v)$.

Wniosek 3 (Tw. Halla dla grafów)**.** *G ma skojarzenie nasycajace V_1 wgdy*

$$\forall S \subseteq V_1 : \ |N(S)| \geq |S|.$$

Wniosek 4. *Dany jest zbiór X mocy n. $\forall r < n/2$ istnieje iniekcja $f_r : \binom{X}{r} \to \binom{X}{r+1}$ taka, że $\forall A \in \binom{X}{r} : \ f(A) \supset A$.*

Definicja 2. Rodzinę zbiorów $\mathcal{F}$ nazywamy systemem Spernera (SS), gdy żaden zbiór nie zawiera się w innym. Dla $X = [n]$ niech

$$\alpha_n = \max\{|\mathcal{F}| : \ (X, \mathcal{F}) \quad \text{jest SS}\}.$$

Twierdzenie 2 (Sperner, 1928)**.** $\alpha_n = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$

Twierdzenie 3 (Nierówność LYM)**.** *Jeśli $(X, \mathcal{F})$ jest SS i $a_k = |\mathcal{F} \cap \binom{X}{k}|$, to*

$$\sum_{k=0} \frac{a_k}{\binom{n}{k}} \leq 1.$$

Problem Littlewooda-Offorda: Dany jest ciąg liczb rzeczywistych $x_1, \ldots, x_n$, $|x_i| \geq 1$. Dla każdego $A \subseteq [n]$, niech $x_A = \sum_{i \in A} x_i$ (suma częściowa). Co najwyżej ile spośród tych 2^n sum częściowych różni się od siebie o mniej niż 1?

Twierdzenie 4 (Erdős, 1945)**.** *Liczba takich sum częściowych nie przekracza* $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

Posety: Poset = zbiór częściowo uporządkowany $(X, \leq)$. Dwa elementy x, y są albo porównywalne ($x \leq y$ lub $y \leq x$) albo nie.

Definicja 3. *Łańcuch* to podzbiór elementów, z których każde dwa są porównywalne. *Antyłańcuch* to podzbiór elementów, z których żadne dwa nie są porównywalne.

Twierdzenie 5 (Dilworth, 1950)**.** *W kadym skończonym posecie moc najwiekszego antyłańcucha równa się najmniejszej liczbie łańcuchów pokrywających ten poset.*

Twierdzenie 6 (Dualne Tw. Dilwortha)**.** *W każdym skończonym posecie X moc największego łańcucha równa się minimalnej liczbie antyłańcuchów pokrywających X.*

Lemat 1 (Lemat Dilwortha)**.** *Dla dowolnych liczb naturalnych a, b, każdy poset X rzędu $|X| \geq ab + 1$ zawiera albo łańcuch mocy $a + 1$ albo antyłańcuch mocy $b + 1$.*

Definicja 4. Hipergraf $H = (V, E)$ jest *r-jednolity*, gdy $E \subseteq \binom{V}{r}$, a *r-dzielny*, gdy dodatkowo istnieje podzial $V = V_1 \cup \cdots \cup V_r$ taki, że dla każdej krawędzi $e \in E$ mamy $|e \cap V_i| = 1$, $i = 1, \ldots, r$.

Notacja: $\nu(H)$ – moc największego skojarzenia w H (tzn. największa liczba rozłącznych krawędzi);

$\tau(H)$ – moc najmniejszego pokrycia wierzchołkowego, tzn. najmniejszego zbioru wierzchołków $U \subseteq V$ takiego, że $\forall e \in E : \ e \cap U \neq \emptyset$. Mamy $\nu(H) \leq \tau(H) \leq r\nu(H)$

Hipoteza 1 (Hipoteza Rysera, 1971)**.** $\tau(H) \leq (r - 1)\nu(H)$

Twierdzenie 7 (Konig, 1931)**.** *Hipoteza Rysera jest prawdziwa dla $r = 2$.*

Twierdzenie 8 (Aharoni, 2001)**.** *Hipoteza Rysera jest prawdziwa dla $r = 3$.*

Definicja 5. Rodzina zbiorów $\mathcal{F}$ jest *przecinająca się (IF)*, gdy dla wszystkich par $F, F' \in \mathcal{F}$, $F \cap F' \neq \emptyset$.

Obserwacja: Największa IF podzbiorów zboru mocy n ma moc 2^{n-1}.

Twierdzenie 9 (Erdős-Ko-Rado, 1961)**.** *(a)*

$$\forall 2 \leq r \leq n/2 : \ \mathcal{F} \subset \binom{X}{r} \quad \textit{jest IF} \quad \Rightarrow \quad |\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{r-1};$$

(b) $\forall 2 \leq r < n/2 : \ \mathcal{F} \subset \binom{X}{r}$ *jest IF i* $|\mathcal{F}| = \binom{n-1}{r-1} \quad \Rightarrow \quad \exists x \in X : \ \mathcal{F} = \mathcal{F}_x^{(r)}$, *gdzie* $\mathcal{F}_x^{(r)} = \{F \in \binom{X}{r} : \ F \ni x\}$.

Notacja: Dla $n \geq rs$,

$$m^{(r)}(n, s) = \max\{|E(H)| : \ |V(H)| = n, \ E(H) \subseteq \binom{V(H)}{r}, \ \nu(H) < s\}$$

Hipoteza 2 (Hipoteza Erdősa, 1965)**.** $m^{(r)}(n, s) = \max\{\binom{rs-1}{r}, \binom{n}{r} - \binom{n-s+1}{r}\}$

Twierdzenie 10 (Erdős, Gallai, 1959)**.** *Hipoteza Erdősa jest prawdziwa dla $r = 2$.*

Hipoteza Erdősa jest również prawdziwa dla $r = 3$ (Łuczak, Mieczkowska, 2014)