# Rozwiązania ZZ 15



1) a) $s(r) \geq \frac{1}{2}(3^r+1)$

Najpierw: $s(r+1) \geq 3s(r)-1$

Niech $n = s(r)$, $\chi : [n-1] \to \{c_1, \dots, c_r\}$

$\chi$ – kolorowanie bez monochr. trójek Schura

Zdef. $\chi' : [3n-2] \to \{c_1, \dots, c_r, c_{r+1}\}$:

$$\chi'(i) = \begin{cases} \chi(i) & \text{dla } i \in [n-1] \\ c_{r+1} & \text{dla } n \leq i \leq 2n-1 \\ \chi(i-(2n-1)) & \text{dla } 2n \leq i \leq 3n-2 \end{cases}$$

W kol. $\chi'$ też nie ma monochr. trójek Schura,

bo: (i) $x+y=z \Rightarrow \{x,y,z\} \not\subset [n, 2n-1]$, więc nie ma trójki Sch. w kolorze $c_{r+1}$;

(ii) jeśli $x,y,z \in [n-1]$, to z zał. o $\chi$ nie są monochr.

(iii) jeśli $x \in [n-1]$, $y,z \geq 2n$, to podstawmy $y' = y-(2n-1)$, $z' = z-(2n-1)$; wtedy $z' = x+y'$, $x,y',z' \in [n-1]$

więc $\chi'(x) = \chi(x)$, $\chi'(y) = \chi(y')$, $\chi'(z) = \chi(z')$ są różne.

Stąd, $s(r+1) \geq 3n-1 = 3s(r)-1$ ✓

Stos. ind. wzgl. r: $s(2) = 5 \geq \frac{9+1}{2}$ ✓

$s(r+1) \geq 3 \cdot \frac{1}{2}(3^r+1) - 1 = \frac{3^{r+1}+1}{2}$ □

1 b) $s(r) \leq 3r!-1$

Z dowodu Tw. Schura: $s(r) \leq R(3;r)-1$

Z rekurencji na $R(l_1,\dots,l_r)$ mamy

$$R(3;r) \leq r\,R(\underbrace{3,\dots,3}_{r-1},2) = r\,R(3;r-1).$$

Stąd, przez indukcję po $r$, wynika, że $R(3;r) \leq 3r!$

bo $R(3;2)=6 \leq 3\cdot 2!$, $R(3,r+1) \leq (r+1)R(3;r) \leq 3(r+1)!$

$\square$

---

2) Wiemy z wykładu, że $W(3,2) \geq 9$.

Pokażemy, że $W(3,2) \leq 9$.

Niech $\chi:[9]\to\{R,B\}$. Rozważmy 2 przyp.

I. $\chi(1)=\chi(9) \overset{bso}{=} B \Rightarrow \chi(5)=R \overset{bso}{\Rightarrow} \chi(7)=B$

$\Rightarrow \chi(8)=R \Rightarrow \chi(2)=B \Rightarrow \chi(3)=R \Rightarrow \chi(4)=B$

$\Rightarrow$ otrzymujemy $AP_3$: 1, 4, 7 koloru B

II bso $\chi(1)=B$, $\chi(9)=R \overset{bso}{\Rightarrow} \chi(5)=R \Rightarrow \chi(7)=B$

$\Rightarrow \chi(4)=R \Rightarrow \chi(6)=B \Rightarrow \chi(8)=R \Rightarrow \chi(2)=B$

$\Rightarrow \chi(3)$ zamyka monochr. $AP_3$

* można też inaczej – jest wiele dowodów

3) $\forall\, \chi : [256] \to [2]$ zdef. $\chi' : [9] \to [2]$ poprzez $\chi'(i) = \chi(2^{i-1})$. Wiemy, że w $\chi'$ jest monochr. $AP_3$ : $x, y, z$ : $\chi'(x) = \chi'(y) = \chi'(z)$, $x + y = 2z$.

$$\Rightarrow \chi(2^{x-1}) = \chi(2^{y-1}) = \chi(2^{z-1}) \quad \text{oraz}$$

$$2^{x-1} \cdot 2^{y-1} = 2^{2z-2} = (2^{z-1})^2, \quad \text{czyli}$$

$$2^{x-1}, 2^{y-1}, 2^{z-1} \ - \text{ciąg geom.} \ \square$$

4) Np. $W(3,3) \geq 23$

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| R | R | B | B | R | R | B | G | B | G | G | R | G | R | R | B | R | B | B | G | R | G |

3 kolory: R, B, G

---

5) $\underset{1}{x} - \underset{1}{y} = 7\underset{0}{z}$ TAK, $x + y = 7z$ NIE, $\underset{0}{x_1} + 2\underset{1}{x_2} + 3\underset{1}{x_3} + 4\underset{0}{x_4} = 5\underset{1}{x_5}$ TAK

$x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 8x_4 + 16x_5 - 32x_6 = 0$ NIE

$\frac{1}{3}\underset{1}{x_1} - \frac{1}{4}\underset{1}{x_2} + 2\underset{0}{x_3} - \frac{1}{12}\underset{1}{x_5} = 0$ TAK

---

6) $C_3^4$ $L = (\underset{RSRS}{0201}, 1211, 2221)$ $AP_3 = (33, 43, 53)$

$L = (\underset{RSSS}{0111}, 1111, 2111)$ $AP_3 = (39, 40, 41)$

$C_5^2$ $L = (\underset{RR}{00}, 11, 22, 33, 44)$ $AP_5 = (0, 6, 12, 18, 24)$

$L = (\underset{SR}{30}, 31, 32, 33, 34)$ $AP_5 = (3, 8, 13, 18, 23)$