Matematyka Dyskretna II

Zestaw Zadań #8

Na: środa, 1 grudnia

1. Dla $r \in \mathbf{N}$ i ciągu liczb rzeczywistych $(x_1, \ldots, x_n)$, takich że $|x_i| \geq 1$, $i = 1, \ldots, n$, niech

$$\alpha_r(x_1, \ldots, x_n) = \max_{\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(n)} \{|\mathcal{F}| : \forall A, B \in \mathcal{F}, A \neq B, \quad |x_A - x_B| < r\}.$$

   (a) Pokazać, że $\alpha_r(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = \alpha_r(x_1, \ldots, -x_i, \ldots, x_n)$.

   (b) Niech $y_A = \sum_A x_i - \sum_{A^c} x_i$. Pokazać, że

$$\alpha_r(x_1, \ldots, x_n) = \max_{\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(n)} \{|\mathcal{F}| : \exists x \quad \forall A \in \mathcal{F} \quad y_A \in (x - r, x + r)\}.$$

2. Udowodnić Dualne Tw. Dilwortha

   Wskaz.: użyc funkcji $r : X \to \mathbf{N}_0$

$$r(x) = \max\{|L| - 1 : \quad L \in \mathcal{L}_x\},$$

   gdzie $\mathcal{L}_x$ jest zbiorem łańcuchów o największym elemencie x.

3. Udowodnić Lemat Dilwortha: Dla dowolnych liczb naturalnych a, b, każdy poset X rzędu $|X| \geq ab + 1$ zawiera albo łańcuch mocy $a + 1$ albo antyłańcuch mocy $b + 1$.

4. Wywnioskuj tw. Erdősa-Szekeresa z Lematu Dilworta.