Matematyka Dyskretna II

Zestaw Zadań #7

Na: środa, 24 listopada

1. Udowodnij, że dla każdego $r > n/2$ istnieje iniekcja $f_r : \binom{X}{r+1} \to \binom{X}{r}$ taka, że dla każdego $A \in \binom{X}{r+1}$ mamy $f(A) \subset A$
2. Wywnioskuj Tw. Spernera z nierówności LYM.
3. Niech $k \leq n/2$. Jeśli SS $\mathcal{F}$ składa się ze zbiorów mocy niewiększej niż k, to $|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{k}$.
4. Jaka jest największa moc SS z co najmniej jednym zbiorem mocy niewiększej niż 2, co najmniej jednym zbiorem mocy co najmniej $n-2$ i nie posiadającej żadnych zbiorów mocy od 3 do $n-3$?
5. Dla liczby naturalnej s niech $\mathcal{F}$ będzie s-Systemem Spernera (s-SS), tzn. $\mathcal{F}$ nie zawiera łańcuchów dłuższych niż s. Niech $a_k = \left|\mathcal{F} \cap \binom{X}{k}\right|$. Dowieść, że
$$\sum_{k=0}^{n} a_k \binom{n}{k}^{-1} \leq s.$$
6. Pokazać, że nierówność LYM staje się równością wgdy $\mathcal{F} = \binom{X}{k}$ dla pewnego $k \in [n]$.