Matematyka Dyskretna II

Zestaw Zadań #5

Na: wtorek, 9 listopada, g. 12 (mój dyżur)

1. (dot. dowodu Tw. 10) Ze szczęśliwej szóstki $i, i+1, i+2, i+3, i+4, i+5$ można utworzyć 2 szcz. ósemki:

   - $\pi(i) < \pi(i+1) < \pi(i+2) < \pi(i+3) > \pi(i+4) < \pi(i+5) > \pi(i+6) > \pi(i+7)$ i $\pi(i+2) > \pi(i+6)$
   - $\pi(i) < \pi(i+1) < \pi(i+2) > \pi(i+3) < \pi(i+4) < \pi(i+5) > \pi(i+6) > \pi(i+7)$ i $\pi(i+4) > \pi(i+6)$ i $\pi(i+4) > \pi(i+2)$

   Podobnie, po 2 szcz. ósemki można utworzyć z pozostałych typów szcz. szóstek. Oblicz wartość oczekiwaną liczby wszystkich szcz. ósemek w obu połowach losowej permutacji i popraw oszacowanie w Tw. 10.

2. r-*wieloraczki* to zbiór r rozłącznych, izomorficznych podpermutacji. Np. w permutacji

   $$(12, 6, 7, 2, 1, 3, 5, 4, 8, 13, 10, 9, 11)$$

   podpermutacje $(12, 7, 8)$, $(6, 1, 3)$ i $(13, 10, 11)$ tworzą 3-wieloraczki, czyli trojaczki, bo wszystkie 3 są izomorficzne z $(3, 1, 2)$. Niech $t_r(\pi)$ będzie długością najdłuższych r-wieloraczków w π. Pokazać, że pnp $t(\Pi_n) = O\left(n^{r/(2r-1)}\right)$.

3. Parametr $bt_r(\pi)$ definiujemy jako długość najdłuzszych blokowych r-wieloraczków w π. Niech $bt_r(n) = \min_\pi bt(\pi)$, gdzie minimum przebiega po wszystkich permutacjach π rzędu n. Pokazać, że $bt_r(n) \geq (1 + o(1))\frac{\log n}{\log\log n}$.

4. Ile permutacji długości 4 ma ciasne blźnięta (dł. 2), a ile z nich ma również blokowe bliźnięta? Czy odpowiedź zmieni się, gdyby rozpatrywać słabe bliźnięta lub gdyby nie wymagać, by były ciasne ani blokowe?

5. Wskazać permutację dł. 5 bez ciasnych bliźniąt dł. 2 oraz wykazać, że każda permutacja dł. 6 posiada takie bliźnięta.

6. Stosując konstrukcję 4 Rosjan, wskazać permutację dł. 20 be repetycji. Uzasadnić.

7. Czy konstrukcja 4 Rosjan gwarantuje permutacje bez słabych repetycji? Wykazać, że każda permutacja długości co najmniej 8 zawiera słabą repetycję.

8. Wykazać, że jeśli graf dwudzielny n na n nie spełnia warunku Halla, to po jednej lub drugiej stronie dwupodziału istnieje zbiór wierzchołków S mocy $|S| \leq \lceil n/2 \rceil$, dla którego $|N(S)| < |S|$. (Trudniejsze!)