Struktury Dyskretne

Zestaw Zadań #4

Na: środa, 3 listopada, g. 14 (mój dyżur)

1. Ciąg U_{n+1}, zdefiniowany na wykładzie, powstaje również z U_n przez podstawienie $0 \to 01$, $1 \to 10$. Wskaz.: udowodnić indukcynie, że $U_n = W_n$, gdzie $W_1 = 0$, a dla każdego $n \geq 1$ W_{n+1} powstaje z W_n przez powyższe podstawienie.
2. Wyrazy na pozycjach nieparzystych tworzą w U_{n+1} kopię U_n, a na parzystych – kopię $\overline{U_n}$.
3. W dowodzie Tw. 5 wyjaśnić dlaczego $t_n \in \{1, 2, 3\}$ dla każdego $n \geq 1$.
4. Czy (silne) repetycje są jednocześnie słabymi bliźniętami blokowymi?
5. Ile permutacji długości 4 ma ciasne blźnięta (dł. 2), a ile z nich ma również blokowe bliźnięta? Czy odpowiedź zmieni się, gdyby rozpatrywać słabe bliźnięta lub gdyby nie wymagać by były ciasne ani blokowe?
6. Wskazać permutację dł. 5 bez ciasnych bliźniąt dł. 2 oraz wykazać, że każda permutacja dł. 6 posiada takie bliźnięta.
7. Sprawdzić, że w dowodzie Tw. 8, rzeczywiście $\sum_{i=1}^{k} x_i = n$.
8. Pod koniec wykładu wspomniałem o prostej metodzie (4 Rosjan) generowania permutacji bez (silnych) repetycji. Wszystkie te premutacje są postaci „zygzakowatej”, w tym sensie, że każdy segment monotoniczny jest dł. 3, z wyjątkiem, ewent., poczatku i końca, gdzie mogą mieć długość 2.

   (a) Wykażcie, że żadna permutacja takiego typu nie ma repetycji dł. 2 bądź 3 (nawet słabych).

   Np. taką permutacją jest 13542. Żeby z niej stworzyć np. permutację bez repetycji dł. 9, powielamy ją dla „środkowych” 5 elementów z [9], tzn. 3, 4, 5, 6, 7. Mamy więc permutację 35764 (jest ona izomorficzna z 13542). Teraz pozostałe elementy z [9] dodajemy dowolnie pomiędzy, ale w ten sposób, by 1,2 byly na pozycjach minimalnych, a 8,9 – na maksymalnych. Np. tak: 138527964.

   (b) W podobny sposób, wiedząc że 13742685 nie ma repetycji, znajdźcie permutację dł. 16 bez repetycji i wytłumaczcie dlaczego ich w niej nie ma (wskaz.: dowód niewprost).